Florica T.
Câmpan

AVENTURA GEOMETRIILOR NEEUCLIDIENE

EDITURA ALBATROS

Prof. dr. docent FLORICA T. CÂMPAN

AVENTURA GEOMETRIILOR NEEUCLIDIENE

Referenți științifici:

Conf. dr. IOAN D. TEODORESCU
Lect. dr. NICOLAE BOTH

Coperta de GH. MARINESCU

Prof. dr. docent **FLORICA T. CÂMPAN**

AVENTURA GEOMETRIILOR NEEUCLIDIENE

Ilogariceanu
Iași, 7.X.1978.

EDITURA ALBATROS
1978

Închin cartea, ca semn de admirație,
Umbrelor
din ale căror gînduri s-a întruchipat
această povestire.

INTRODUCERE

„Și tot ce-i ne-nțeles
Se schimbă-n ne-nțelesuri și mai mari."

Lucian Blaga

Aventura geometriilor neeuclidiene a început cu vreo 2 300 de ani în urmă, cînd unii dintre filozofii vechii Elade, citind cu multă atenție ELEMENTELE *scrise tocmai atunci de Euclid, nu s-au lăsat cuprinși de admirația și încîntarea generală, ci au arătat anumite rezerve, mai ales cu privire la postulatul al V-lea. Nu-i contestau adevărul pe care-l exprima. Ca și ceilalți geometri, erau și ei ferm convinși că : „dacă o dreaptă, tăind două drepte, formează unghiuri interne și de aceeași parte mai mici decît două unghiuri drepte, cele două drepte prelungite la infinit o să se întîlnească în partea în care se află unghiurile mai mici decît două unghiuri drepte". Nu înțelegeau însă de ce acest adevăr, exprimat în chip de teoremă, fusese așezat printre postulate și nu acolo unde s-ar părea că-i este locul, adică printre teoreme ? Nu ascundea el, oare, în adevăr, o teoremă, pe care Euclid nu o putuse demonstra ? N-ar fi de mirare, căci adesea se întîmplă ca anumite lucruri să-ți rămînă ascunse, deși, altora, ele le sar în ochi ! Cu timpul, această bănuială s-a preschimbat într-un fel de certitudine, transmițînd, din generație în generație, curiozitatea, interesul și mai*

ales rîvna de a stabili adevărul, într-un fel sau altul, dar mai mult de a afla demonstrația, presupusă lăinuită. Nostim era că fiecare cercetător găsea de îndată greșeala care-l amăgise pe înaintașul lui dîndu-i iluzia reușitei, dar, în același timp, nu se îndoia nici o clipă că, în sfîrșit, el deținea demonstrația mult așteptată ! Aventura a durat pînă în secolul al XIX-lea, cînd au fost descoperite geometriile neeuclidiene. Rezultatul a fost surprinzător : în locul unei demonstrații au apărut geometrii, despre a căror existență nimeni nu bănuise nimic.

Cu acest deznodămînt ar fi trebuit să se termine aventura pe care o urmărim, dar realitatea e alta, aventura va continua într-un mod tot așa de neașteptat pe cît de neașteptată a fost și apariția geometriilor neeuclidiene. Ele nu aveau nimic din calmul maiestuos al geometriei lui Euclid, din contră, în ele fumega neliniștea și zbuciumul secolelor în care s-au plămădit, așa că prezența lor a dezlănțuit o revoluție nu numai în matematici, dar și în astronomie, fizică și chiar filozofie ! „În domeniul științei", scria Simion Stoilov," o revoluție este o prefacere adîncă, o temeinică transformare pricinuită de un fapt esențial nou, de o lege generatoare de noi și vaste progrese, de o descoperire deschizătoare de drumuri noi ce lasă să se întrevadă perspective largi, bogate, care adesea pînă atunci nu puteau fi bănuite. Ei bine, din acest punct de vedere se poate spune fără îndoială că crearea geometriilor neeuclidiene reprezintă pentru istoria științei un moment de o importanță covîrșitoare, care a influențat în mod hotărîtor cercetările geometriei moderne" (1)

Or, dacă pînă la izbucnirea revoluției, matematicienii nu înțelegeau doar ce rol juca postulatul al V-lea, după dezlănțuirea ei se vor ivi, rînd pe rînd, alte probleme mai adînci și cu atît mai de neînțeles cu cît ele vor pune

întrebări fățișe despre spațiul fizic, despre bazele geometriei, ba chiar și despre însăși natura intimă a adevărului matematic. În felul acesta se încheie aventura geometriilor neeuclidiene, aventură ce mai are și o parte fantastică, dacă ținem seamă că unii cercetători au descoperit urme de geometrie neeuclidiană în scrierile matematicienilor babiloneni sau greci, datînd cu mult înainte de a fi fost compusă geometria lui Euclid (2) !

Celor doritori de mai multe amănunte sau de anumite îndrumări, le sînt destinate notele ce completează povestirea.

UN DAR MAGNIFIC

„Geometria este limbajul omului... de la naşterea sa, omul nu a acţionat decît pe fundamentul geometriei, pe care a pătruns-o cu atîta claritate încît putem admite că ea este aceea care ne condiţionează."

Le Corbusier[1]

Despre temeinicele cunoştinţe de geometrie însuşite de oameni, cu multe mii de ani în urmă, ne vorbesc şi ruinele complexelor arhitectonice răspîndite în diferite părţi ale Pămîntului şi descoperirile arheologilor. Cum se calculau ariile, volumele sau capacităţile, cum se stabilea înclinarea dintre două drepte sau dintre două feţe plane, ne-o arată, de pildă, scrierile cu caracter matematic ale egiptenilor sau ale sumerienilor (3). Din acestea, şi din altele, constatăm că numeroasele cunoştinţe de geometrie care s-au acumulat în vechile civilizaţii nu formau un sistem bine închegat şi ordonat, aşa cum sîntem obişnuiţi să le găsim în geometria cunoscută acum. Problemele de geometrie descifrate fie în papirusurile egiptene, fie pe tăbliţele de lut ale sumerienilor, sînt asemenea reţetelor folosite de gospodine: „siropul de zmeură se face punînd mai întîi...". Erau formule stabilite în mod empiric, printr-un raţionament inductiv, avînd la bază fie procesul de generalizare a unor experienţe transmise din generaţie în generaţie, fie aplicînd metoda analogiei. Din această cauză, nu toate formulele întrebuinţate în calculele rămase de atunci conduceau la rezultate precise (4).

Geometria, acea ştiinţă deductivă în stare să devină subiect de delectare intelectuală, să te sustragă chiar de la preocupările imediate ale vieţii, sau să te facă să uiţi nu

---

[1] Le Corbusier (Jeanneret, Charles Edouard, 1887—1965), arhitect, urbanist, pictor şi teoretician de artă francez, de origine elveţiană.

numai niște insuportabile dureri de dinți, dar că a trecut o săptămînă fără să părăsești masa de lucru, cum i s-a întîmplat odată lui Blaise Pascal (5), a fost creată de greci prin secolul al VI-lea î.e.n.

Tradiția afirmă că Tales ar fi fost primul matematician care a avut inspirația să-i pună temelia (6). El era ionian, negustor din Milet și, în această calitate, a vizitat, probabil, Egiptul și Babilonul. Desigur că nu numai el, dar și mulți alți negustori greci au făcut asemenea călătorii prin țări străine. Cu toții duceau și aduceau mărfuri, admirînd piramidele, templele sau palatele pe care le întîlneau în cale, dar nici unul dintre ei nu a fost pînă într-atîta robit de curiozitatea de a afla cum s-au conceput aceste mărețe realizări, încît să-și părăsească negustoria numai ca să le afle taina ! Tales însă a făcut-o. El a rămas, probabil, mai mulți ani în Egipt și s-a interesat îndeaproape de meșteșugul harpedonaptilor care întindeau sforile și făceau măsurătorile de teren, de acela al astronomilor care stabileau orientarea construcțiilor după stele, al arhitecților care întocmeau planurile clădirilor și, în fine, de acela al scribilor

care știau să facă felurite socoteli. După ce a învățat tot ce se putea învăța în legătură cu matematicile și cu astronomia, știa multe, dar nu era prea mulțumit de cunoștințele dobîndite, fiindcă mintea lui, dornică să pătrundă în adîncul cugetării, nu era satisfăcută aflînd *cum se face*, ci ar fi dorit să adauge la aceasta și răspunsul la întrebarea : *de ce se face așa ?* Învățații egipteni nu i-au putut satisface această dorință. Ei moșteniseră din moși-strămoși regulile ce se învățau în școlile lor de scribi și erau foarte mulțumiți cu atîta ; trebuia doar să țină minte procedeul ce se aplica la fiecare caz în parte !

Tales a avut cinstea să înceapă construcția marei piramide a geometriei ca știință, știință care a căpătat atunci acest nume ce nu i se va potrivi de fel, căci *geo-metrie* înseamnă măsurarea pămîntului ! Dacă, în cazul *geografiei*, numirea corespunde obiectului, fiindcă geografia se ocupă cu descrierea pămîntului, geometria, așa cum a conceput-o Tales și se va dezvolta mai departe, nu avea nici în clin, nici în mînecă cu măsurarea pămîntului. Dar, deși numirea nu i s-a potrivit, nimeni nu a încercat să o schimbe, ci, din contră, s-a dat alt nume științei ce se va ocupa de măsurarea pămîntului (7).

Tales a fost, poate, primul om care a privit figurile geometrice dezgolite de materie. El le-a desenat pe nisip și le-a cercetat elementele din care se compuneau. La un triunghi, de pildă, a deosebit marginile lui, formînd în exterior trei drepte, iar în interior, la colțuri, trei unghiuri. Asemenea elemente geometrice — unghiurile — nu au mai fost considerate de nimeni pînă la el (8). Analizînd diferite figuri, Tales a presupus că între elementele stabilite de el — laturi și unghiuri — trebuie să existe anumite relații și s-a străduit să descopere unele dintre ele, logic, prin raționamente deductive. Se pare că asemenea preocupări au plăcut tinerilor greci, inteligenți, intuitivi și predispuși spre abstractizare, așa că Tales a găsit destui discipoli care să i se alăture în stabilirea unor adevăruri geometrice ce rezultau din cercetarea figurilor geometrice prin raționamente (9). În acest mod a dat primul impuls în formarea științei geometriei. Al doilea se atribuie lui Pitagora și elevilor lui.

Pitagora (10) era tot din Ionia și se născuse în Samos. Tradiția afirmă că în școala lui „geometria a fost ridicată

Pitagora

la rangul de disciplină independentă, fiindcă s-a înălțat pînă la principii și a căutat teoremele în mod abstract" (11). Demonstrațiile geometrice erau urmărite pe figuri, figura fiind privită ca o abstractizare a modelului din lumea fizică. Din această cauză, ea era executată cu *rigla și compasul*, păstrîndu-se cu grijă relațiile cantitative sau de ordonare ale modelului pe care-l reprezenta. Figurile erau formate numai din drepte și cercuri, acestea fiind considerate ca singurele linii perfecte, primele ca imagini ale razelor de lumină, iar ultimele reprezentînd drumurile descrise de astre pe bolta cerească. Dealtfel, este probabil că pitagoreicii au încercat, pentru întîia oară, să ordoneze teoremele cunoscute pînă atunci în așa fel ca ele să se deducă, logic, unele din altele.

Bun prieten cu pitagoreicii și convins că numai pe studiul geometriei se poate întemeia filozofia, Platon a pus pe frontispiciul *Academiei* înființate de el următoarea înștiințare : „Nimeni nu intră aici pînă cînd nu este geometru". În multe dintre dialogurile lui, el a discutat despre geometrie, privită ca o știință deductivă și a căutat să pună chiar bazele unei filozofii a matematicilor (12).

Platon

Aristotel

Tot pe atunci, problemele geometriei erau și în atenția altor școli filozofice (13). Mai tîrziu, Aristotel, deși nu era matematician, s-a ocupat îndeaproape de acest obiect (14). Iată, de pildă, unele dintre observațiile lui : „orice știință demonstrativă are de-a face cu trei lucruri, a căror existență ea o presupune. Acestea sînt : *genul*, ale cărui atribute ea le cercetează, apoi așa-numitele *axiome* generale din care, privite ca elemente prime, ea deduce *demonstrațiile* și, în al treilea rînd, *proprietățile* al căror înțeles particular știința îl admite" (15). De asemenea, într-un paragraf din *Fizică*, Aristotel a accentuat faptul că geometria abstractizează : „corpurile fizice au suprafețe, volume, lungimi și puncte... Cu aceste forme se ocupă matematicianul, dar nu le studiază ca și cum ar fi un corp fizic, pe care ele îl delimitează... De aceea, el separă obiectele matematice, căci în gîndire ele sînt separabile... geometria examinează o linie fizică numai în măsura în care ea nu este fizică, iar optica examinează o linie matematică numai în măsura în care ea nu este matematică, ci este fizică... atributele inseparabile,

care nu sînt privite ca proprietăţi ale unui anumit corp, ci sînt cercetate prin abstracţie, constituie obiectul de studiu al matematicianului" (16).

Ţinînd seama de constatarea pe care Aristotel a făcut-o asupra *dreptelor paralele*, este neîndoielnic că el trebuie implicat în misterioasele începuturi ale aventurii geometriilor neeuclidiene pe care vrem să o urmărim în această carte.

Dealtfel, se pare că nici Tales nu a privit cu indiferenţă problema dreptelor paralele. Aceasta apare din însuşi faptul că el cunoştea unul din cazurile de asemănare ale triunghiurilor, caz ce implică noţiunea de paralelism. Mai tîrziu, cînd rezultatele obţinute de Tales au fost comentate în şcoala lui Pitagora, problema dreptelor paralele a continuat să se afle printre acelea ce se discutau şi de pitagoreici.

Prin secolul al V-lea î.e.n., Hipocrate din Chios le-a folosit într-o construcţie foarte ingenioasă. Aristotel însă le-a menţionat ca să arate că matematicienii care căutau să demonstreze că două drepte sînt paralele, bazîndu-se pe egalitatea unghiurilor corespondente, *puneau la baza demonstraţiei lor tocmai ceea ce nu s-ar putea demonstra dacă dreptele nu ar fi paralele.* În felul acesta, el a atras atenţia asupra unei *erori logice*, care se comitea de pe atunci de către acei matematicieni ce ar fi vrut *să demonstreze existenţa dreptelor paralele.* Aristotel apare astfel ca primul judecător care intervine în problema despre paralele, observînd eroarea provenită din faptul că se lua drept premisă ceea ce ar fi trebuit să fie concluzie!

Printre cei ce audiind lecţiile lui Aristotel erau la curent şi cu problema paralelelor, se afla şi tînărul Euclid. El a frecventat cu acelaşi interes şi *Academia*, unde, după moartea lui Platon, noul conducător prezenta şi comenta scrierile înaintaşului său. Astfel, Euclid a putut să cunoască îndeaproape atît lucrările matematice ale celor mai de seamă învăţaţi din toată Grecia, cît şi manualele de geometrie, intitulate *Elemente*, ce fuseseră scrise pînă atunci, fiindcă la acele cursuri se comentau adesea lucrările matematice ale lui Hipocrate din Chios, ale lui Eudoxos din Knidos, ca să nu mai amintim de acelea ale înaintaşilor Tales, Pitagora...

Euclid

Se pare că Euclid ajunsese la o cunoaștere așa de adîncă a acestor probleme matematice că, atunci cînd Ptolemeu I, regele Egiptului, a căutat la Atena pe cel mai destoinic care să conducă învățămîntul matematic din modernul *Institut* științific pe care-l înființase în Alexandria, el fusese singurul recomandat pentru această misiune. Așa a început povestea lui Euclid, autorul de mai tîrziu al *Elementelor*. S-ar putea oare afirma că, dacă Euclid nu ar fi părăsit Atena ca să devină profesor de matematici la Muzeul din Alexandria, el ar mai fi scris vestitele și neîntrecutele lui *Elemente* ? Pentru cine să le fi scris ? În Atena existau cîteva manuale, numite *Elemente*, unul, după afirmația lui Proclus (17), scris chiar pe atunci. Poate că mai degrabă ar fi fost tentat să caute rezolvarea unora dintre celebrele probleme insolubile ce pasionau pe matematicienii greci și stîrneau controverse înverșunate ! Stabilindu-se însă în Alexandria, lucrurile luau cu totul altă înfățișare. Aici, el avea să pună bazele unei școli de geometrie și trebuia să scrie un curs pe care să-l prezinte într-o formă cît mai desăvîrșită. Ca să-l

pregătească, Euclid s-a gîndit nu numai la lecţiile pe care le-a ascultat la Atena, dar a folosit şi toate manuscrisele ce le adusese cu el. Pătruns adînc de ideile lui Platon şi Aristotel, dorea ca *Elementele* lui, adresate tineretului ce-şi făcuse ucenicia la scris, citit şi logistică (18), să fie nu numai clare şi precise, dar să răspundă şi acelui înţeles profund al cuvîntului „stoicheia" (elemente) pe care i-l atribuiau filozofii, adică de elemente fundamentale : foc, apă şi pămînt. *Elementele* lui de geometrie nu trebuia să se prezinte ca o copie îmbunătăţită a *Elementelor* lui Teudios sau ale altuia, nici ca o lucrare de geometrie practică, ci ca o selecţie de *elemente fundamentale*, de *principii* şi *teoreme* alese în aşa fel încît oricine le-ar stăpîni să fie în stare să găsească apoi, el singur, prin deduceri logice, oricare dintre teoremele ştiute ce nu ar fi fost introduse în carte şi oricare alte teoreme ce nu s-au descoperit încă (19).

Desigur că nu era uşor să poată înfăptui cele ce şi-a propus. Mai întîi, avea să caute un criteriu precis după care să-şi aleagă adevărurile matematice ce trebuiau încadrate într-o schemă logică, în aşa fel, ca, pornind de la cît mai puţine definiţii şi propoziţii intuitive, stabilite în mod empiric şi presupuse destul de evidente ca să nu aibă nevoie de demonstraţii, toate celelalte adevăruri — teoreme — să se deducă prin demonstraţii, progresiv, unele din altele, de la cele mai simple la cele mai complicate. În alegerea acestui criteriu s-a lăsat condus de Platon : „numai acele probleme ce se pot construi cu rigla şi compasul", aşadar numai probleme despre drepte şi cerc situate oricum în plan şi în spaţiu (20). În al doilea rînd, dat fiind că mărimile geometrice nu puteau fi separate de numere, acestea reprezentîndu-le, era necesar ca *Elementele* lui să cuprindă, alături de teoremele geometriei, şi pe acelea ale aritmeticii. Teribila furtună ce se dezlănţuise în şcoala lui Pitagora pornise tocmai de la faptul că între diagonala pătratului şi latura lui nu exista un raport de numere naturale care să exprime măsura lor, iar celebrul Eudoxos descoperise acea frumoasă teorie a proporţiilor, teorie la care contribuise şi el adăugîndu-i cîteva propoziţii noi !

Şi astfel, tot cumpănind cum ar fi cel mai bine să prezinte lucrurile, Euclid a ajuns la vreo 450 de propoziţii ce trebuiau neapărat menţionate. Pe acestea le-a împărţit în

13 cărți, primele 6 cuprinzînd teoremele de geometrie plană ultimele 3 pe acelea de geometrie în spațiu, iar între ele a intercalat problemele de aritmetică, repartizate în 4 cărți. Fiecare dintre cărți avea să înceapă, ori de cîte ori va fi nevoie, cu definirea elementelor despre care nu mai fusese vorba pînă atunci și să se termine cu o teoremă care să rezume sau să cuprindă, pe cît posibil, mulțimea teoremelor demonstrate în acea carte.

Cel mai greu i-a venit lui Euclid să scrie *Cartea I.* Abia după ce a enumerat definițiile cunoscute despre punct, dreaptă, figură, unghi, plan, cerc etc., a adăugat, ca ultimă definiție, pe aceea a dreptelor paralele : „Paralele sînt dreptele care, fiind situate în același plan și fiind prelungite în mod indefinit, de ambele părți, nu se întîlnesc în nici o parte". A pus-o la sfîrșit, deși nu cu teoremele despre dreptele paralele se hotărîse să încheie această carte, amintindu-și cele ce aflase despre ele în *Lyceum*-ul lui Aristotel.

După definiții, trebuia să introducă aici, în această primă *Carte*, acele adevăruri *intuitive* pe care se va sprijini întreaga construcție a *Elementelor* : *postulatele*, adică principiile referitoare la geometria și *noțiunile comune*, pe care lui Aristotel îi plăcea să le numească *axiome*, adică principiile care se referă la mărimi, în general (21). Primele 4 postulate s-au înfățișat parcă de la sine, fiindcă era evident ca ele să exprime existența dreptelor, a cercurilor și a egalității unghiurilor drepte. Dar era oare tot așa de evident că *există* o singură paralelă dusă dintr-un punct exterior unei drepte la acea dreaptă, care să fie situată în planul format de punct și dreaptă ? Aristotel amintise că, dacă nu se admitea evidența faptului, o asemenea demonstrație putea duce la un sofism ! Euclid însuși reușise să înșire primele 28 de teoreme fără să se bazeze pe acest postulat. Stabilise în teoremele 27 și 28 că „dacă o dreaptă, tăind două drepte, formează unghiuri alterne egale între ele, sau interne și de aceeași parte egale cu două unghiuri drepte, dreptele sînt paralele între ele", fără să se sprijine pe alte postulate decît pe cele 4, pe care le formulase. Mai departe însă nu mai putea merge decît fie încercînd demonstrarea posibilității de a duce această paralelă, fie considerînd existența ei printr-un nou postulat. Gîndind la avertizarea lui Aristotel, s-a hotărît pentru *postulat* și a ales ca formă a celui de-al V-lea

postulat, următoarea propoziție: „dacă o dreaptă, tăind două drepte, formează unghiuri interne și de aceeași parte mai mici decît două unghiuri drepte, cele două drepte prelungite la infinit o să se întîlnească în partea în care se află unghiurile mai mici decît două unghiuri drepte". În felul acesta, el asigura nu numai existența, dar și poziția punctului de intersecție a două drepte care, intersectate cu o alta, ar fi făcut unghiuri interne și de aceeași parte a secantei mai mici decît două unghiuri drepte.

A răsuflat ușurat cînd a trecut de acest „hop" și apoi a formulat *noțiunile comune*, care s-au potrivit a fi tot în număr de cinci (22). Concentrîndu-se asupra teoremelor, la a căror demonstrare s-a străduit îndelung, ca să le poată încadra în canoanele logicii aristotelice, Euclid le-a înlănțuit în așa fel ca cele ce urmau să se sprijine pe acelea dinaintea lor. Începînd *Cartea I* cu teoremele stabilite odinioară de Tales și Pitagora, celelalte cărți le-a continuat cu teoremele discutate pe atunci în *Academie* sau descoperite chiar de el, lăsînd la urmă frumoasele teoreme despre înscrierea și circumscrierea poliedrelor regulate în sferă, ca o încununare a întregii lucrări și terminînd cu demonstrarea faptului că nu pot exista mai mult decît cinci poliedre regulate.

Compunînd astfel *Elementele*, Euclid făcea matematicienilor *un dar magnific*, însă acest lucru nu a fost apreciat și nici înțeles cu adevărat decît în ultima parte a secolului al XIX-lea. Pînă atunci, cu toată admirația față de *Elemente*, unii matematicieni, mai ales cei îndrăgostiți de mitologie, erau mai degrabă înclinați să compare acest dar cu calul troian, în pîntecele căruia considerau că Euclid ascunsese unele dintre definițiile și postulatele lui!

DE-A ASCUNSELEA

„Căci imaginația, deși disciplinată, nu încetează să-și facă de joacă cu figurile geometrice și să ne dăruiască probe plăcute, care nu sînt totuși decît încredințări".

Alain[1]

Din *Comentariile* lui Proculs la prima carte a *Elementelor* lui Euclid aflăm că, îndată după ce au apărut *Elementele*, ele au stîrnit multă zarvă printre matematicieni. Aceasta nu a fost provocată nici de alegerea teoremelor și nici de modul cum erau demonstrate sau repartizate ele în cele 13 cărți ; în această privință nimeni nu avea ce cîrti ; ca dovadă, în secolele următoare s-au mai adăugat două cărți (23), ce-i drept, mai slabe, dar dealtfel urmînd același procedeu. Discuțiile au pornit de la fundamentarea logică a *Elementelor*, de la unele definiții, de la postulatul al IV-lea (24) și, mai ales, de la postulatul al V-lea, pe care se baza teoria paralelelor și care, culmea culmilor, era exprimat cu totul altfel decît celelalte postulate, ca și cum ar fi fost vorba de o teoremă! Această bizară nesimetrie, introdusă într-o operă plină de armonie interioară, părea lipsită de sens și mulți matematicieni au fost tentați să treacă postulatul al V-lea printre teoreme, după ce-i va fi găsit o demonstrație. Iată ce scria Proclus, după ce a transcris enunțul postulatului cu pricina : „Această propoziție trebuie eliminată complet din rîndul postulatelor, căci este o teoremă cu multe dificultăți, pe care Ptolemeu și-a propus să o rezolve într-o carte. Pentru demonstrarea ei este nevoie de multe definiții și de diferite alte teoreme, iar reciproca este demonstrată, ca teoremă, de însuși Euclid... cînd cele două unghiuri drepte se micșorează, tendința de apropiere a drep-

[1] Alain (Chartier, Emile, 1868—1951), filozof francez.

telor este reală şi necesară ; faptul că ele se vor intersecta la un moment dat, prin prelungire, este numai ceva probabil, nu necesar, dacă nu demonstrăm că acest lucru se întîmplă în adevăr cu dreptele. Căci faptul că există anumite linii care la infinit se apropie una de alta, dar nu coincid niciodată, poate suna neverosimil, ba chiar absurd. Cu toate acestea, este un fapt care a fost stabilit la alte feluri de linii. Oare nu era posibil să se întîmple şi la drepte ceea ce se întîmplă la acele linii ?... Dacă şi temeiurile care ar pleda contra intersectării fac o puternică impresie, cum am putea noi să nu excludem din ipoteza noastră ceea ce este numai probabil şi nefondat ? "

După cum vedem, părerea susţinută de Proclus în acest paragraf contestatar era întărită de încercarea lui Claudiu Ptolemeu (25), renumitul autor al *Almagestei*, de a stabili o demonstraţie a postulatului paralelelor. De asemenea, se mai baza încă pe rezultatele altui matematician mai vechi, Geminus (26), elev al lui Posidoniu. Afirmaţia lui Proclus asupra liniilor care nu sînt paralele şi nici nu se întîlnesc vizează chiar cercetările lui Geminus, care arătase

că definiția paralelelor dată de Euclid poate conduce la un paradox (27). Considerînd paralelele ca *drepte echidistante* — așa cum le definea Posidoniu —, Geminus credea că a reușit să demonstreze postulatul al V-lea. În realitate, el a înlocuit postulatul al V-lea cu acela că „punctele echidistante de o dreaptă se găsesc tot pe o dreaptă". Or, în acest caz, folosind altul în loc, postulatul enunțat de Euclid devenea demonstrabil.

Nu cunoaștem numele acelora care au încercat să *demonstreze* postulatul paralelelor mai înainte de Geminus. Două veacuri după el, a făcut-o Claudiu Ptolemeu și, după alte vreo două veacuri și jumătate, însuși Proclus, care, deși critică aceste încercări, se lasă și el prins de farmecul postulatului îmbrăcat în haină de teoremă și propune următoarea demonstrație :

Fie cele două drepte paralele (D_1) și (D_2) și o altă dreaptă (D_3) care intersectează D_1 în punctul T. Dacă D_3 intersectează D_1, atunci ea va intersecta și D_2 ; căci, după cum afirmă Aristotel, distanța dintre două drepte ce se intersectează crește nelimitat cînd cele două drepte sînt prelungite la infinit. Așadar, la un moment dat, dreapta D_3 va depăși distanța dintre D_1 și D_2, adică va întîlni și pe D_2, ceea ce trebuia stabilit !

Demonstrația lui Proclus pare așa de evidentă încît ne miră faptul că nimeni nu s-a gîndit la ea, mai înainte de el. Numai că, și ea, ca și celelalte dinaintea ei, *ne amăgește* că ar fi o *demonstrație* a postulatului lui Euclid despre paralele ; în realitate, nu face altceva decît să-l recunoască, ascuns în *presupunerea nedemonstrabilă* că distanța dintre două paralele rămîne constantă sau mărginită !

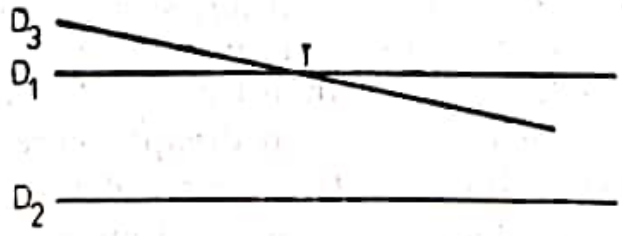


Fig. 1

Proclus a avut mai mulți elevi, care i-au continuat opera. Ultimul, anume Simplicius, a comentat și el pe Aristotel și Cartea I a *Elementelor*, discutînd, cum era natural, și despre postulatul al V-lea. De aici înainte, vreo 300 de ani, alte

griji mai apăsătoare decît „identitatea" postulatului al V-lea au cuprins gîndurile poporului grec și ale celorlalte învecinate. Dar aceste sute de ani de lupte și nevoi n-au fost în stare să șteargă definitiv amintirea problemei care iscase atita vîlvă printre geometrii născuți cu un mileniu mai înainte și continuase să-i preocupe secole de-a rîndul. După acest răstimp, despre care cercetările istorice au umplut multe volume ca să povestească întîmplările, matematicienii de cultură arabă, care, începînd din secolul al VIII-lea au tradus în această limbă lucrările matematice grecești, au pus și ei, din nou, aceleași întrebări asupra postulatului paralelelor. Azi, ei sînt considerați ca moștenitorii științei elene și, cu drept cuvînt, fiindcă numai datorită acestor savanți de cultură arabă, începînd cu secolul al XII-lea, Europa a putut cunoaște și însuși știința elenă, pe care își va clădi propria ei știință.

Îndată după ce *Elementele* lui Euclid au fost traduse în limba arabă, matematicienii au arătat un interes deosebit pentru teoria paralelelor. Prima comentare a teoriei paralelelor a fost făcută în secolul al IX-lea de către Tabit ibn Korra, care a retradus *Elementele* — traducerea anterioară fiind considerată plină de greșeli. Tabit ibn Korra a fost un bun matematician și de aceea a putut să comenteze lucrarea prezentată în traducere și astfel să atragă atenția asupra ei. Pentru arabi, această lucrare a fost semnalul; de aici încolo, postulatul paralelelor devine pentru noii geometri tot așa de irezistibil ca joaca pentru copii.

Prima încercare de a demonstra postulatul paralelelor a făcut-o matematicianul și astronomul al-Djauhari, cam pe la sfîrșitul secolului al IX-lea. Din titlul lucrării, *Perfecționarea cărții Elementelor*, se vădește intenția autorului. Fiind un matematician iscusit, el considera că a stabilit teorema sub forma: „prin orice punct din interiorul oricărui unghi dat se poate duce o dreaptă care să intersecteze ambele laturi". Însă, pentru această demonstrație el a făcut, implicit, ipoteza că, „dacă două drepte paralele sînt intersectate de o altă dreaptă și unghiurile alterne interne sînt egale, același lucru se întîmplă oricare ar fi dreapta care intersectează cele două paralele". Așadar, din nou s-a strecurat în ipoteză ceea ce trebuia dovedit.

A doua încercare a apărut chiar la începutul secolului al X-lea cînd alt matematician și astronom remarcabil, aparținînd școlii din Bagdad, ibn Hatim an-Nairizi, a scris alt comentariu asupra primelor 6 cărți ale *Elementelor*. Discutînd teoria paralelelor, el amintește de o lucrare a lui Simplicius, în care se arăta că matematicianul grec Aganis a reușit să demonstreze postulatul al V-lea și chiar să construiască punctul de intersecție al dreptelor, pornind de la ipoteza că dreptele paralele sînt echidistante (28).

Pare curios, pe de o parte, că, în afară de an-Nairizi, nimeni nu a mai pomenit despre un matematician grec cu numele de Aganis iar, pe de alta, se remarcă o perfectă coincidență între rezultatele atribuite de Simplicius lui Aganis și acelea cunoscute ca aparținînd lui Geminus. Aceasta a făcut ca unii dintre cercetătorii istoriei matematicilor elene să presupună că poate fi vorba de o confuzie de nume, fie datorită traducătorului, care și pe Simplicius îl numea Sambelichius, fie chiar și lui Simplicius însuși, lucrarea acestuia nemaiexistînd ca să se poată face vreo confruntare.

Un alt matematician, renumit prin multe rezultate originale stabilite în diferite domenii ale matematicilor, care s-a ocupat și de postulatul lui Euclid, a fost ibn al-Haitam. În *Cartea comentariilor*, la introducerile din cartea lui Euclid, *Elemente*, autorul începe chiar prin analizarea noțiunii de paralele, observînd că ea implică, prin „prelungirea la infinit", un proces imposibil de realizat practic! Abia după

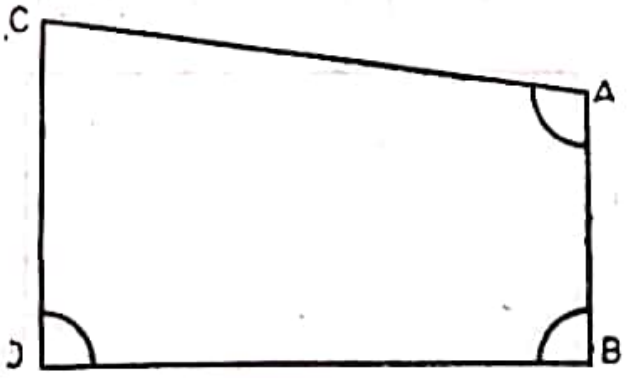


Fig. 2

ce a considerat că problema a fost lămurită (29), el se ocupă de demonstrarea postulatului. În acest scop, al-Haitam imaginează un patrulater $ABCD$, în care unghiurile A și B adiacente laturii AB sînt drepte și, de asemenea unghiul D, rezultat din ducerea perpendicularei dintr-un punct

oarecare C, de pe latura AC, pe latura BD. Despre unghiul C nu afirmă că este drept, faptul ar fi demonstrat „de la sine", dacă s-ar putea dovedi că laturile opuse AB și CD sînt egale. Egalitatea a stabilit-o prin reducere la absurd. Odată arătat că patrulaterul $ABCD$ are toate unghiurile drepte, al-Haitam a demonstrat postulatul al V-lea. El propunea să fie înserat ca teoremă, anume între teoremele 28 și 29 din *Elemente*, iar în locul postulatului al V-lea să fie introdus următorul: „două drepte nu limitează o suprafață". Ne amintim că și Ptolemeu a folosit acest postulat în mod implicit, însă nu acesta era postulatul cu care al-Haitam ar fi trebuit să-l înlocuiască pe cel de-al V-lea al lui Euclid, ci un altul, acela inclus de el însuși în faptul că admitea că *dreptele paralele sînt și echidistante*. Aceasta a făcut ca și în demonstrația lui să existe o greșeală de raționament. În schimb, al-Haitam a stabilit cîteva teoreme, riguros dovedite, printre care și următoarea: „două drepte care se intersectează nu pot fi paralele cu aceeași dreaptă".

Aproape peste un veac, „regele filozofilor din Orient și Occident, doveditorul adevărului, capul cercetătorilor, preaînvățatul hogea și regele învățaților", — ca să nu folosim decît o parte din titlurile pe care și le aroga matematicianul-poet Omar Khayyam, era și el ferm convins că postulatul al V-lea se poate demonstra. Întîi, el a studiat îndeaproape toate cele peste 30 de demonstrații diferite ce fuseseră publicate de înaintașii lui și le-a descoperit părțile lor slabe, apoi a stabilit propria lui teorie. Rezultatele au

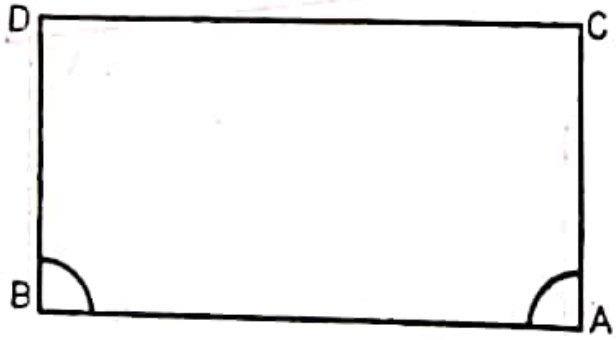


Fig. 3

apărut în anul 1077, în *Comentariile la dificultățile din introducerile cărții lui Euclid*. Aici, el propunea înlocuirea postulatului al V-lea prin propoziția, despre care afirma că a fost enunțată de Aristotel: „două drepte convergente se intersectează și nu este posibil ca ele să se îndepărteze pe

direcția convergenței lor" (30). Și Omar Khayyam a folosit, în demonstrarea postulatului, patrulaterul introdus de al-Haitam, numai că îl definește altfel, anume, consideră că pe segmentul AB se duc două perpendiculare egale AC și BD, unite prin segmentul CD. În acest patrulater, se știe numai că unghiurile A și B sînt drepte, pe cînd unghiurile C și D ar putea fi amîndouă, fie ascuțite, fie drepte, fie obtuze. Prin reducere la absurd, el elimină ipotezele unghiurilor ascuțite sau obtuze și astfel rămîne dovedit că patrulaterul $ABCD$ are toate patru unghiurile drepte. În lucrarea sa, Omar Khayyam nu și-a dezmințit porecla de „doveditorul adevărului", căci el nu a avut pretenția de a demonstra postulatul paralelelor fără să se bazeze pe un alt postulat echivalent, prin care să-l înlocuiască. Dar „rege al filozofilor din Orient și Occident" nu s-a arătat a fi, căci și el, ca toți cei pînă la el, s-a mărginit a privi problema numai la suprafață, fără să o adîncească, fără să caute să vadă ce s-ar fi putut întîmpla dacă ar fi admis că unghiurile C și D sînt ascuțite sau obtuze. Această observație este ușor să o facem acum, după ce au fost descoperite geometriile neeuclidiene. Însă pînă aproape de secolul al XIX-lea, nimănui nu i-a trecut prin minte că geometria ar putea fi și altceva decît știința despre figurile din spațiul înconjurător, în care trăim noi!

Ca toți predecesorii și ca alți mulți dintre matematicienii care îi vor urma, matematicianul-poet era încredințat de adevărul exprimat prin postulatul al V-lea, dar nu și de faptul că acest adevăr nu putea fi demonstrat. De aceea el a rămas convins că a stabilit această demonstrație.

La mai puțin de două veacuri de la apariția lucrării lui Omar Khayyam, un alt matematician iranian, Nasir ed-Din at-Tusi, se considera și el îndreptățit să afirme că a găsit demonstrația rîvnită (31). După ce a făcut o nouă traducere a celor 13 cărți ale *Elementelor* lui Euclid și a analizat cu de-amănuntul lucrările scrise de al-Djauhari, ibn al-Haitam și Omar Khayyam, a formulat o nouă teorie a paralelelor. În demonstrația pe care a imaginat-o, a folosit și el patrulaterul lui Omar Khayyam, însă, după afirmația lui, nu a introdus nici o ipoteză suplimentară. Desigur, așa credea el. În realitate însă el s-a sprijinit pe ipoteza că „suma unghiurilor dintr-un triunghi este egală cu două un-

ghiuri drepte", ipoteză echivalentă cu postulatul ce trebuia dovedit! Nasir ed-Din a publicat rezultatele lui mai întîi în lucrarea *Tratat care înlătură îndoiala în privința liniilor paralele* și apoi în două redactări diferite ale traducerii *Elementelor* lui Euclid, făcută de el, traduceri urmate de comentarii intitulate *Expunerea lui Euclid*. A doua dintre aceste redactări, cu titlul *Expunerea lui Euclid*, a fost tipărită la Roma, în 1594, în limba arabă, iar apoi, în 1657, tradusă în limba latină.

S-ar putea spune că traducerea lui Nasir ed-Din a apărut destul de tîrziu, dacă ținem seama că operele matematice, scrise în limba arabă, au început să fie cercetate și traduse în latinește încă din secolul al XII-lea (32). Există totuși o explicație: din veacul al XII-lea, matematicienii din Europa de vest au făcut cunoștință nu numai cu *Elementele* lui Euclid, dar, totodată, cu multe alte lucrări matematice din domenii diferite. Astfel, la început, au fost atrași, în particular, de problemele noi ridicate de aritmetică prin descoperirea sistemului pozițional de scriere a numerelor și, odată cu aceasta, de înlocuire a operațiilor făcute pe abac prin metode de calcul direct pe hîrtie. Apoi, foarte ispititoare le-a apărut algebra, știință cu totul necunoscută pînă atunci, care le permitea să rezolve problemele cu ajutorul ecuațiilor, și nu numai ale acelora de gradul I, dar și de gradele II, III și chiar IV. În fine, de multă importanță se arăta a fi studiul astronomiei, al astrologiei și, odată cu acestea, studiul trigonometriei și al calculării tabelelor legate de asemenea cercetări. Așa că, în urma acestor preocupări, își găsea loc și geometria!

O mărturie serioasă că așa stăteau lucrurile ne-a lăsat-o filozoful și naturalistul englez Roger Bacon (1214 — 1292), fost student al Universității din Oxford. El ne spune că, în timpul studiilor sale, la geometrie nu i s-au predat decît „primele 5 propoziții din prima Carte a lui Euclid". Roger Bacon a fost totuși, în această privință, un student privilegiat, căci pînă în secolul al XVI-lea existau multe universități în Europa de vest în care *geometria* era înlocuită cu *astrologia*, iar unui candidat la postul de profesor de matematici nu i se cerea să cunoască mai mult decît primele 5 — 6 cărți ale *Elementelor*, verificarea cunoștințelor făcîndu-se uneori *nu prin examen*, ci prin *depunere de jură-*

mînt (33) ! Așa se face că, deși pînă în secolul al XVI-lea existau destule traduceri ale *Elementelor*, cele dintîi făcute după texte arabe, iar din secolul al XV-lea chiar după originalul grec, nici un matematician european nu a ridicat problema paralelelor. Se pare că ea a fost cunoscută abia după ce s-au tipărit *Comentariile* lui Proclus, întîi la Basel, în 1533, în limba greacă și apoi la Padua, în 1560, în limba latină.

Primul matematician din Europa care se pare că a atras atenția asupra postulatului al V-lea, devenit în unele traduceri axioma a XI-a sau chiar a XIII-a, a fost C. Clavius (1537 — 1612), unul dintre cei mai remarcabili profesori de matematică de atunci (34). În volumul *Elementele lui Euclid*, apărut la Roma în 1574, alături de traducerea celor 15 (13 + 2) cărți a *Elementelor*, el stabilește demonstrația postulatului al V-lea, înlocuindu-l pe acesta prin acela amintit de Proclus, anume că „linia echidistantă de o dreaptă este o dreaptă".

Odată trezită curiozitatea, matematicienii din secolul al XVI-lea și de mai tîrziu s-au arătat tot așa de tentați de teoria paralelelor, ca odinioară matematicienii greci sau cei din Orientul apropiat.

O altă lucrare care tratează această problemă și în același sens, a apărut în 1603 sub titlul *Despre linii echidistante și neechidistante* și a fost scrisă de un matematician renumit P. A. Cataldi (1548 — 1628), profesor de matematici la cîteva dintre cele mai importante universități italiene și autor al multor tratate matematice, dintre care și o nouă redactare a primelor 6 cărți din *Elemente*. Dar, în timp ce la Roma apărea *Expunerea lui Euclid* de Nasir ed-Din, un an mai tîrziu, adică în 1658, G.A. Borelli (1608 — 1679) tipărea la Pisa *Euclides restitutus* (Euclid reconstituit), unde stabilea o altă „demonstrație", respectiv un alt fel de a înlocui postulatul paralelelor, pornind tot de la noțiunea de drepte echidistante.

Într-un mod diferit a pus problema John Wallis (1616 — 1703), profesor de matematici la Universitatea din Oxford, de îndată ce a cunoscut lucrarea lui Nasir ed-Din (35). Pentru el, traducerea latinească a *Expunerii lui Euclid* a fost o adevărată revelație. După ce a studiat-o amănunțit și a meditat îndelung asupra ei, el a considerat că a găsit

John Wallis

soluţia problemei şi anume înlocuirea postulatului paralelelor prin următorul: „la fiecare figură dată există o alta asemenea ei, oricare ar fi raportul de asemănare". Folosind acest nou postulat, el transforma vechiul postulat într-o teoremă. Asupra acestei probleme, el a atras atenţia matematicienilor englezi într-o conferinţă ţinută în 1663 la Oxford, publicîndu-şi rezultatele în 1693, în volumul II al *Operelor* sale, sub titlul: „Demonstraţia postulatului V al lui Euclid". Procedînd astfel, Wallis, ca şi Omar Khayyam, nu a încercat eliminarea, ci numai înlocuirea postulatului paralelelor cu un altul, care i se părea lui mai accesibil. Întrebarea ce se punea era dacă această substituire prezintă vreun avantaj faţă de forma originală considerată de Euclid şi răspunsul era că nu, deoarece postulatul lui Wallis cuprindea mai multe date decît ar fi fost necesar! Ajungea să se afirme că „există în plan două triunghiuri asemenea", ca postulatul paralelelor să poată fi demonstrat, aşadar să-l înlocuiască.

Nici aceste rezultate ale lui Wallis nu au pus capăt încercărilor de a se găsi o demonstraţie a postulatului al V-lea,

cu sau fără înlocuirea lui! O nouă lucrare purtînd titlul *Euclide restituto* a apărut la Roma, în 1680. În lucrare, matematicianul Giordano Vitale (1633 — 1711) se întorcea din nou la noțiunea de echidistanță și clădea pe ea o altă demonstrație, la fel ca celelalte de pînă acum. Căci, ca și Wallis, ca și toți ceilalți matematicieni, Giordano Vitale repeta metoda înlocuirii postulatului al V-lea cu un oarecare altul echivalent cu el, înlocuire prin care postulatul paralelelor se transforma automat într-o teoremă!

Geometria, așa cum fusese concepută de Euclid, se dovedea un puternic monarh absolut al spațiului înconjurător și nici celui mai răzvrătit dintre supuși nu i-ar fi trecut prin minte că l-ar putea răsturna. Strădania supușilor-geometri se mărginea doar la căutarea unei demonstrații, care să schimbe postulatul al V-lea în teoremă, căutare care era tot așa de ademenitoare ca o joacă „de-a ascunselea", fiecare cercetător fiind convins că el singur va izbuti să dibuiască demonstrația în ascunzișul ei și să o aducă la lumină. Astfel, aventura geometriilor neeuclidiene era în plină desfășurare, fără ca nimeni să o bănuiască!

ÎNDOIALA

„Eforturile omului de a cunoaşte s-au dezvoltat paralel cu eforturile lui de a vedea şi de a închipui ..."

Tudor Vianu[1]

Girolamo Saccheri (1667—1733), unul dintre geometrii cei mai iscusiţi din întreaga Italie, a scris o carte care poartă un titlu ieşit din comun : *Euclid curăţat de orice pată sau o încercare geometrică de a consolida bazele întregii geometrii.* Cartea a apărut în 1733 şi a fost dedicată Senatului din Milano. Din „Cuvînt înainte către cititor" se poate deduce că autorul cunoştea foarte bine *Elementele* lui Euclid şi că analizase critic multe dintre zadarnicele încercări făcute pînă la el de a găsi o demonstraţie postulatului paralelelor, care, arăta el, în redactarea *Elementelor* făcută de Clavius, apărea ca axioma a XIII-a. „Desigur", continua Saccheri în acelaşi *Cuvînt înainte*, „nimeni nu se îndoieşte de adevărul acestei aserţiuni, dimpotrivă, însă Euclid a fost criticat pentru că a folosit denumirea de axiomă, ca şi cum acest adevăr s-ar lămuri de la sine. Nu puţini au încercat să scoată această axiomă dintre adevărurile fundamentale şi să o pună la locul cuvenit sub forma de teoremă, a 29-a." Aceasta nu-i *singura pată* atribuită lui Euclid. Autorul menţionează încă două : *definiţia mărimilor proporţionale (Cartea a V-a)*, definiţia şi *compunerea rapoartelor (Cartea a VI-a*, definiţia a 5-a, acum însă trecută în *Cartea a V-a*, definiţia 14). Cu ultimele două definiţii „pătate" s-a ocupat în partea a doua a cărţii, prima fiind consacrată doar celei dintîi şi celei mai importante dintre pete. Girolamo Saccheri credea că nereuşita stră-

[1] Vianu, Tudor, (1897—1964), estetician, istoric literar, filozof şi scriitor român.

daniilor de a găsi demonstrația postulatului al V-lea, demonstrație despre care el era convins că există, se datora faptului că fuseseră alese metode directe, ce dădeau ocazie unui alt postulat să se strecoare pe nesimțite în țesătura raționamentelor și astfel să se ajungă la un cerc vicios. De aceea, el era hotărît să procedeze altfel, anume să aplice metoda *reducerii la absurd*. Procedînd astfel, el depășea problema deoarece, *chiar* prin absurd, el *nu se mai îndoia numai de independența postulatului paralelelor*, ci chiar și *de adevărul* exprimat de acesta.

Asemenea cutezanță nu mai avusese nimeni, fiindcă după cum am văzut că mărturisea singur, el era convins de adevărul acestei propoziții. Saccheri însă considera că, admițînd, *prin absurd*, că postulatul al V-lea poate fi negat, din consecințele lipsite de sens ce vor decurge din această închipuire va reieși demonstrația adevărului exprimat de postulatul paralelelor. Era metoda care nu dăduse niciodată greș, pe care o aplicase de atîtea ori cu succes însuși Euclid în *Elementele* sale (36). Cartea începea cu enunțul postulatului „care va fi demonstrat" și se termina cu același enunț, aparținînd însă teoremei 39. Prima teoremă are următorul cuprins: „Dacă două drepte egale *AC* și *BD* sînt perpendiculare pe o aceeași dreaptă, atunci unghiurile de la dreapta de legătură dintre ele sînt egale" (37). Patrulaterul *ABCD* ne este cunoscut, el a fost imaginat de Omar Khayyam și apoi folosit de Nasir ed-Din. Saccheri l-a găsit chiar în cartea lui Nasir ed-Din intitulată *Expunerea lui Euclid*, tipărită, după cum știm, la Roma, pe la sfîrșitul veacului al XVI-lea, pe care o și citează în lucrarea sa, alături de cărțile lui John Wallis, G. A. Borelli și Clavius. Însă, spre deosebire de înaintașii lui,

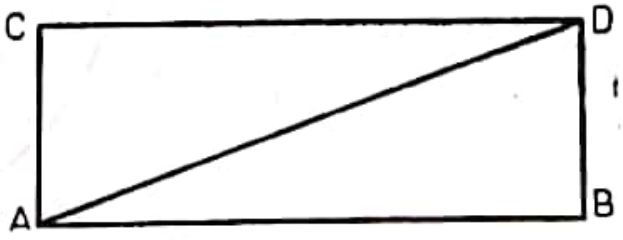


Fig. 4

Saccheri a pătruns mai adînc în structura acestui patrulater, stabilind multe teoreme surprinzătoare. Negînd de la început postulatul paralelelor, el avea posibilitatea să dispună de *unghiurile egale C* și *D*, închipuindu-și-le în oricare dintre

cele trei ipoteze: C și D *unghiuri drepte*, C și D *unghiuri obtuze*, C și D *unghiuri ascuțite*. Iată, spre exemplificare, cîteva dintre aceste teoreme:

Teorema III. Dacă două drepte egale AC și BD sînt perpendiculare pe o dreaptă AB, atunci linia de legătură CD este sau egală cu AB, sau mai mică sau mai mare, după cum unghiurile C și D sînt drepte, obtuze sau ascuțite.

Teorema IV. Și invers, pentru figura de mai sus, unghiurile C și D sînt drepte, obtuze sau ascuțite, după cum dreapta CD este egală, mai mică sau mai mare decît AB.

În loc să urmărim demonstrațiile pe care Saccheri le stabilește pentru fiecare caz în parte, vom ilustra teorema, pentru cazul unghiurilor C și D obtuze, pe următorul exemplu intuitiv: Să presupunem că în locul planului ar exista o sferă. Se știe că pe o sferă cercurile mari, adică acelea care au raza egală cu raza sferei, țin locul dreptelor din plan (*fig. 5*). Așadar, fie AB un segment de pe ecuator, iar PA și PB două meridiane, care, după cum se știe, taie linia ecuatorului după unghiuri drepte, de pildă, A și B. Luînd arcele de cerc egale AC și BD și unind punctele C și D printr-un arc de cerc mare, se obține patrulaterul *bidreptunghic*, numit și *patru-*

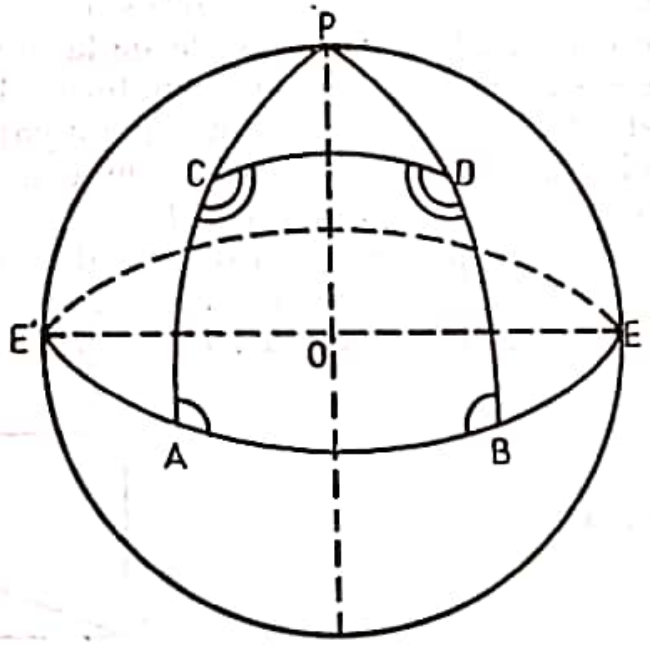


Fig. 5

laterul lui Saccheri, pentru cazul că unghiurile C și D sînt obtuze. Se vede de pe figură că, în acest caz, arcul de cerc mare CD este mai mic decît arcul AB. Saccheri nu a cunoscut această reprezentare intuitivă a unuia dintre cazurile patru-

laterului său. Reprezentarea a fost introdusă abia după ce au fost descoperite geometriile neeuclidiene, ea fiind folosită ca model de suprafață pe care este valabilă geometria patrulaterului cu unghiurile *C* și *D* obtuze.

O altă teoremă stabilită de Saccheri este următoarea:

Teorema XV. Suma unghiurilor dintr-un triunghi este *egală cu două unghiuri drepte, mai mare* sau *mai mică decît două unghiuri drepte*, după cum este valabilă ipoteza unghiurilor *C* și *D drepte*, *C* și *D obtuze* sau *C* și *D ascuțite*.

Demonstrația acestei teoreme este imediată, dacă se duce în patrulaterul *ABCD* o diagonală, de pildă *AD*. Ipoteza că unghiurile *C* și *D* sînt drepte atrage după sine existența postulatului paralelelor. Așadar, Saccheri urma să dovedească absurditatea celorlalte două ipoteze ca să le poată elimina și astfel să rezulte demonstrația adevărului exprimat de postulatul paralelelor.

Dar aceste absurdități sau contraziceri se lăsau așteptate, teoremele pe care le descoperea Saccheri erau posibile din punct de vedere logic, chiar dacă contraziceau imaginea intuitivă a relațiilor corespunzătoare din geometria cunoscută de autor. Cine știe dacă prin mintea subtilului gînditor nu cumva a trecut, o clipă, îndoiala? Îndoiala *în adevărul* în care credea! Așa pare să se întrezărească din rîndurile care urmează după ultima teoremă reprezentînd postulatul-demonstrat: „Aceasta este chiar renumita axiomă a lui Euclid, pe care am reușit, în sfîrșit, să o demonstrez. Pentru acest scop final, trebuie însă să revin asupra unora dintre demonstrații. În teoremele mele am introdus trei ipoteze asupra naturii unghiurilor care se află pe linia de legătură *CD* și am stabilit că dacă o teoremă este adevărată numai într-un singur caz, fie el acela al unghiurilor drepte sau obtuze, fie al unghiurilor ascuțite, acea teoremă rămîne adevărată pentru toate cazurile respective asemănătoare. Apoi, în teorema a XIV-a am arătat că ipoteza unghiurilor obtuze este falsă pentru că duce la o contrazicere ... a rămas însă ipoteza unghiului ascuțit, cu care am avut de luptat timp îndelungat. Dar și despre ea am arătat, în sfîrșit, în teorema XXXIII, că este falsă, pentru că ea contrazice natura liniei drepte ...“

Realitatea este că nici ipoteza unghiului obtuz nu ar fi putut fi infirmată decît cu aceleași argumente folosite în cazul unghiului ascuțit, dacă Saccheri nu ar fi comis greșeala

cercului vicios. Îndoiala în adevărul exprimat de postulatul al V-lea, pe care Saccheri a încercat să o introducă numai ca pe *o ipoteză provizorie*, s-a întors ca un bumerang, rănind încrederea matematicienilor în valabilitatea lui.

De acum înainte, o anumită atitudine de îndoială, mai mult sau mai puțin fățișă, se va observa în toate scrierile privind problema postulatului, scrieri influențate și de cartea lui Saccheri, care, după cît se pare, nu a trecut neobservată. Mai întîi, ea a fost remarcată în 1736 de „Acta Eruditorum", revistă citită cu mult interes de matematicieni (editată de G. W. Leibniz), apoi în două dintre cărțile de istorie a matematicilor compuse atunci (38), în fine, în 1763, într-o disertație celebră „Analiza celor mai remarcabile încercări de a demonstra teoria paralelelor", susținută la Universitatea din Göttingen de G.S. Klüger. Această disertație a fost întocmită la îndemnul profesorului A. G. Kästner, el însuși un pasionat cercetător al problemelor de istoria matematicii. În a sa istorie a matematicilor (în patru volume, tipărită între 1796—1800) a arătat că pînă în 1770 s-au scris peste *7 000 de articole sau cărți avînd ca subiect teoria paralelelor* (39).

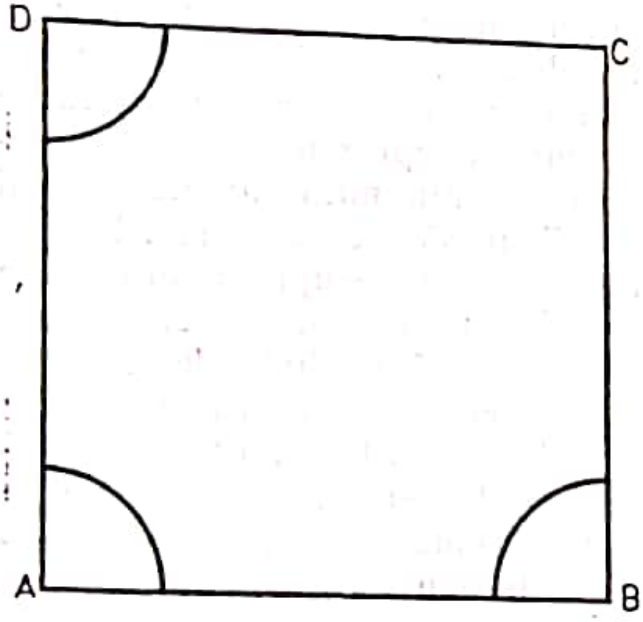


Fig. 6

Oprindu-se la anul 1770, A. G. Kästner nu a putut include în numărătoarea lui și *Teoria dreptelor paralele* scrisă de matematicianul J. H. Lambert (1728—1777), carte pe care a terminat-o în 1766, dar, nemulțumit de ea, a lăsat-o nepublicată și a apărut abia după moartea autorului, în 1786 (40). Ca și Saccheri, Lambert și-a bazat demonstrațiile

pe un patrulater. Acesta era însă tridreptunghic, așa cum îl concepuse ibn al-Haitam, anume : Pe dreapta AB se ridică (*fig 6*) perpendicularele AD și BC, iar dintr-un punct C situat pe BC se duce perpendiculara CD pe AD. În acest caz, unghiurile A, B și D fiind drepte, discuția se va concentra numai asupra naturii unghiului C, care, dacă nu se ține seamă de postulatul paralelelor, poate fi : 1) *drept*, 2) *obtuz* sau 3) *ascuțit*. Lambert a regăsit teoremele stabilite de Saccheri relativ la suma unghiurilor dintr-un triunghi, corespunzătoare celor trei ipoteze, dar, în plus, a mai arătat că *diferența*, pozitivă sau negativă, dintre două unghiuri drepte și suma respectivă a unghiurilor din triunghi, *este proporțională cu aria acelui triunghi* (41). În ipoteza că unghiul C este obtuz, Lambert a remarcat o perfectă analogie între această teoremă, găsită de el, și teorema binecunoscută din trigonometria sferică, relativ la excesul sferic. Aceasta l-a făcut să afirme că s-ar putea stabili o corespondență între geometria pe o sferă și geometria care ar rezulta dacă, în locul postulatului lui Euclid, s-ar considera ipoteza unghiului obtuz. Presupunerile lui au mers chiar mai departe : „Îmi vine să cred că și ipoteza unghiului ascuțit ar putea fi valabilă pe vreo sferă imaginară. Trebuie să existe o cauză care face ca ea să nu se lase contrazisă în plan, așa cum se poate vedea destul de ușor în cazul unghiului obtuz". Iată dar că Lambert aduce noi argumente în favoarea sentimentului de îndoială cu privire la posibilitatea demonstrării postulatului paralelelor. Ba chiar, cuprins de admirație pentru mulțimea și varietatea teoremelor descoperite în ipoteza unghiului ascuțit, a scris : „În acestea este ceva încîntător, care te face să dorești ca ipoteza a treia să fie adevărată." Iar mai departe, a ajuns la următoarea concluzie semnificativă „Demonstrațiile postulatului al V-lea al lui Euclid pot fi duse atît de departe încît s-ar părea că nu a mai rămas decît o nimica toată de adăugat. Însă, la o analiză mai amănunțită, în acest „nimica toată" se cuprinde tocmai miezul problemei, deoarece conține fie afirmația ce trebuia demonstrată, fie un alt postulat echivalent cu postulatul paralelelor." Lambert nu și-a publicat cartea, contrariat fiind de rezultatele descoperite. Simțea că se întîmpla ceva cu teoria paralelelor, ca și cum și-ar fi schimbat centrul de greutate. Deși mulți geometri se mai îndîrjeau încă să caute demonstrația, alții

Joseph Louis Lagrange

arătau îndoială, şi nu numai cu privire la stabilirea dependenţei sau independenţei postulatului al V-lea de celelalte postulate, ci, privind problema mai îndeaproape, la însăşi necesitatea de a considera postulatul al V-lea printre adevărurile obligate să stea la baza geometriei.

În Franţa, marele matematician şi enciclopedist J. R. D'Alembert (1717—1783) observa într-un articol: „Definiţiile şi proprietăţile liniei drepte, ca şi dreptele paralele, au ajuns să fie stîncile sau, ca să spunem altfel, scandalul elementelor de geometrie."

Către sfîrşitul vieţii, J.L. Lagrange (1736—1813), pe care Napoleon îl poreclise „marea piramidă a geometriei", prezentînd la Academia franceză un memoriu asupra liniilor paralele, s-a întrerupt din citit, a strîns manuscrisul şi a spus: „Trebuie să mă mai gîndesc la cele ce am scris" (42)!

Numai A. M. Legendre (1752—1833), cel de-al treilea mare matematician francez de la începutul veacului al XIX-lea (primii doi fiind Lagrange şi Laplace), nu-şi pierduse speranţa şi nu renunţase să se ocupe de demonstrarea

Jean Le Rond D'Alembert

postulatului al V-lea. În prima ediţie a *Elementelor de geometrie* (43), apărută în 1794, Legendre arăta că postulatul al V-lea este echivalent cu teorema că suma unghiurilor dintr-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte. În acest scop, el a dovedit mai întîi, ca şi Saccheri, că suma unghiurilor dintr-un triunghi nu poate fi mai mare decît două unghiuri drepte. Şi, fiindcă din această teoremă se putea deduce că suma unghiurilor dintr-un triunghi ar putea fi egală sau mai mică decît două unghiuri drepte, Legendre a formulat alte două teoreme prin care arăta că: 1) dacă suma unghiurilor *dintr-un singur triunghi* este egală cu două unghiuri drepte, atunci ea are aceeaşi valoare *în oricare alt triunghi din plan*, şi 2) dacă suma unghiurilor dintr-un triunghi *este mai mică decît două unghiuri drepte*, atunci în oricare alt triunghi din plan *suma are această valoare*. Pe baza acestor teoreme, Legendre a demonstrat teorema de echivalenţă: „Dacă suma unghiurilor dintr-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte, atunci postulatul al V-lea al lui Euclid este adevărat" (44). Dar, nefiind mulţumit cu demonstraţiile lui, Legendre le schimba de la o ediţie a *Elementelor* la alta şi, observînd că în aceste demonstraţii

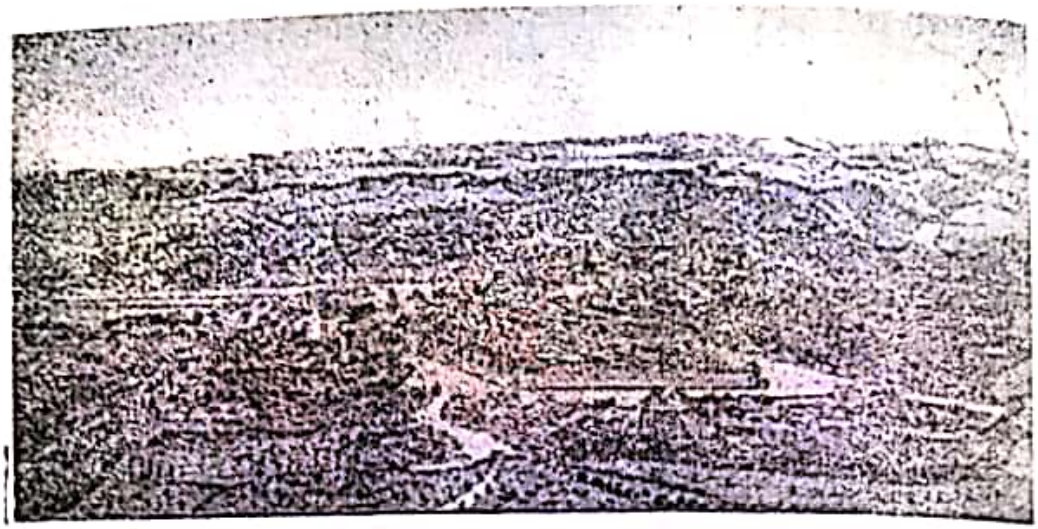
Carl Friedrich Gauss

s-a strecurat chiar o nouă ipoteză, care este echivalentă cu postulatul al V-lea, Legendre a modificat ediția a XII-a, apărută în 1823, stabilind echivalența dintre teorema: „Printr-un punct oarecare din interiorul unui unghi se poate duce o secantă care să taie ambele laturi ale unghiului" și postulatul al V-lea. Timp de 40 de ani, Legendre s-a străduit să găsească o dezlegare în problema postulatului lui Euclid. Se pare că, în ultimii ani ai vieții, îndoiala s-a cuibărit și în mintea lui, căci, în memoriul pe care l-a prezentat în 1833 Academiei de științe din Paris, „Considerații asupra diferitelor procedee de demonstrare a teoremei paralelelor sau a teoremei privitoare la suma unghiurilor dintr-un triunghi", el a expus principalele etape ale cercetărilor întreprinse de-a lungul a 2000 de ani fără a trage nici o concluzie în favoarea vreunei soluționări posibile, fără a recunoaște că fantasticul postulat ar putea fi clintit din locul în care fusese așezat de Euclid!

Cu o înfrigurată pasiune a căutat și Farkas Wolfgang Bolyai (1775—1856) o demonstrație a postulatului paralelelor, încă de pe cînd era student în Göttingen și discuta problema cu prietenul și colegul său C. F. Gauss (1777—1855). În 1799, cînd s-a întors la Cluj, i-a scris prietenului său

Farkas Bolyai

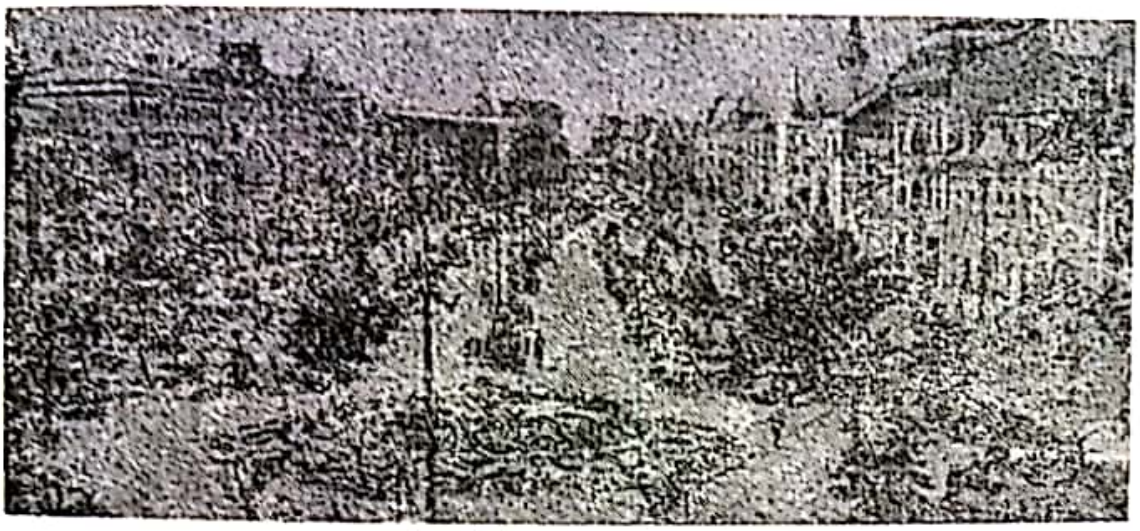
despre cercetările sale. În scrisoarea de răspuns, Gauss îi spunea : „Îmi pare rău că n-am profitat de timpul cînd am fost așa de aproape unul de altul ca să cunosc mai precis lucrarea ta despre bazele geometriei. Mi-aș fi economisit astfel multe din sforțările inutile și aș fi cu spiritul mai odihnit, atîta cît îl poate avea unul cu caracterul meu, cînd mai sînt atîtea de făcut în acest domeniu. Cît despre mine, lucrările mele au progresat ..., dar calea pe care am apucat-o nu duce la scopul căutat și pe care tu afirmi că l-ai găsit, ci conduce mai degrabă a face neîndoielnic adevărul geometriei. Ce-i drept, am ajuns la ceva care pentru alții ar putea să reprezinte o dovadă, dar în ochii mei se arată a fi tot așa de bună ca nimic. De exemplu, dacă s-ar putea demonstra că ar fi posibil să existe un triunghi rectiliniu, a cărei arie să fie mai mare decît a oricărei suprafețe date, atunci aș fi în stare să deduc de aici întreaga geometrie în mod riguros. Cei mai mulți socotesc aceasta drept o axiomă, eu nu, căci ar fi posibil să existe un triunghi, oricît de depărtate ar fi trei puncte în spațiu, astfel ca aria lui să rămînă sub o anumită limită. Asemenea teoreme am multe, dar în nici una nu găsesc ceva mulțumitor ... Trimite-mi lucrarea ta.



Tîrgu Mureș (1824—1825)

Vei obține atunci dreptul la recunoștință, e drept că nu la aceea a marelui public (la care aspiră totuși o mulțime de oameni priviți ca matematicieni abili). Numărul adevăraților geometri este extrem de restrîns și, în cea mai mare parte, oamenii nu-s în stare să-și facă măcar o părere despre greutățile unor asemenea lucrări și nici să le înțeleagă ; de aceea, doresc să te bucuri de recunoștința acelora a căror părere poate avea efectiv preț pentru tine ...".

La începutul anului 1804, Farkas Bolyai fusese numit profesor de matematici, fizică și chimie la Colegiul evanghelic reformat din Tîrgu Mureș, colegiu cu o veche tradiție, unde între 1650 și 1652, vestitul pedagog Comenius fusese chemat să predea cursuri. În această atmosferă, Farkas Bolyai a reluat lucrarea începută cu 6—7 ani în urmă și, după ce a pus-o la punct, a trimis-o prietenului de odinioară, intitulînd-o : *Teoria de la Göttingen relativ la paralele.* În scrisoarea însoțitoare din 16 septembrie 1804, spunea : „Îți trimit *Teoria* mea din Göttingen relativ la paralele". Prin poșta următoare aș vrea să-ți trimit *Principiile aritmeticii și ale geometriei* ... dacă sistemul însuși te-ar interesa, aș fi fericit. Am lăsat deoparte aceste teorii de aproape trei ani, căci împrejurările m-au împiedicat să lucrez. A trebuit să le reiau în vederea predării lor și de aceea le-am expus într-o formă mai restrînsă. N-am putut descoperi vreo greșeală, controlează și tu exactitatea și scrie-mi cît mai



Tîrgu Mureș — azi

degrabă posibil. Arată-mi obiecțiile tale, scrie-mi dacă m-am exprimat rău sau poate prea concis ... Dacă judeci că acest mic opuscul este vrednic, trimite-l la vreo Academie capabilă să-l aprecieze și să-i dea pecetea aprobării ei .. Sînt pregătit să ascult și păreri nefavorabile și poate că nici nu m-aș fi grăbit să dau publicării aceste lucrări dacă, pentru ca să trăiesc în pace cu numeroșii mei critici, nu ar trebui să mă hazardez ca să obțin o anumită reputație ...“

Răspunsul lui Gauss a venit în 25 noiembrie 1804. Sentința era scurtă : „Mi-ai cerut o judecată sinceră și ți-o dau. Îți repet asigurarea că mi-ar fi făcut cea mai mare plăcere ca tu să fi depășit toate aceste greutăți.“

Farkas Bolyai a înțeles atunci că și el, ca și toți cei dinaintea lui, stabilise doar o propoziție echivalentă cu postulatul lui Euclid și nu demonstrase acest lucru, așa cum nu reușise să-l demonstreze nici Gauss, căci, în aceeași scrisoare, Gauss i-a vorbit despre „stîncile pe care au eșuat pînă acum și propriile mele încercări cu privire la teoria paralelelor“. În continuare însă el a mai adăugat : „Sper totuși mereu că voi putea găsi o ieșire printre aceste stînci mai înainte de a mi se sfîrși viața.“ Farkas Bolyai nu va rosti niciodată o asemenea frază, fiindcă după scrisoarea lui Gauss el a închis și pecetluit capitolul despre teoria paralelelor. Dar demonstrația pe care a stabilit-o el, deși înșelătoare, merită să o amintim, fiind interesantă prin originalitatea invenției.

Bolyai a dat postulatului al V-lea o formă echivalentă, anume că *o perpendiculară și o oblică pe o aceeași dreaptă*

se întîlnesc întotdeauna și a căutat o demonstrație a acestui fapt. Pentru aceasta, a considerat dreapta AB și a dus pe ea perpendiculara PB și oblica CA. „Dacă se întîlnesc", și-a spus Farkas Bolyai, „atunci trebuie determinat punctul

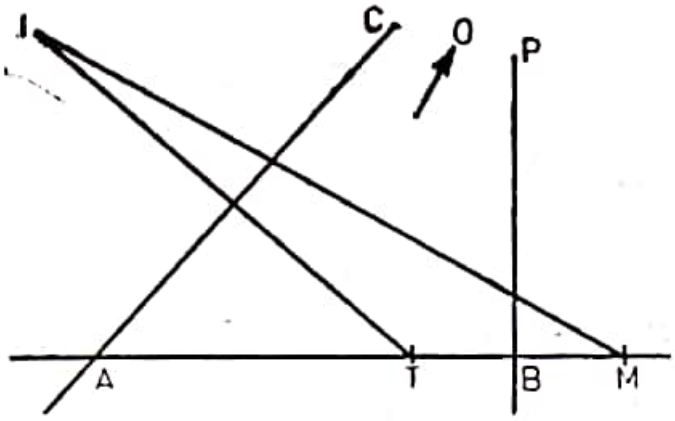


Fig. 7

lor de intersecție." În acest scop a considerat un punct oarecare T pe dreapta AB, între A și B, și a construit simetricele acestui punct T față de perpendiculară și față de oblică, ducînd din T perpendicularele pe aceste două drepte. Astfel a obținut punctele M și I. Punctele M, I și T nefiind în linie dreaptă, prin ele trece totdeauna un arc de cerc al cărui centru O este chiar punctul de intersecție al dreptelor PB și CA, deoarece PB este mediatoarea coardei TM, iar CA este mediatoare față de coarda IT.

Farkas Bolyai era sigur că demonstrația lui nu are nici o greșeală, dar Gauss i-a arătat-o imediat: el presupunea că prin trei puncte care nu sînt în linie dreaptă se poate duce întotdeauna un cerc; or, tocmai aceasta nu o putea presupune, căci această propoziție este un adevăr echivalent cu postulatul paralelelor și dacă se presupune existența cercului, atunci postulatul paralelelor se poate demonstra!

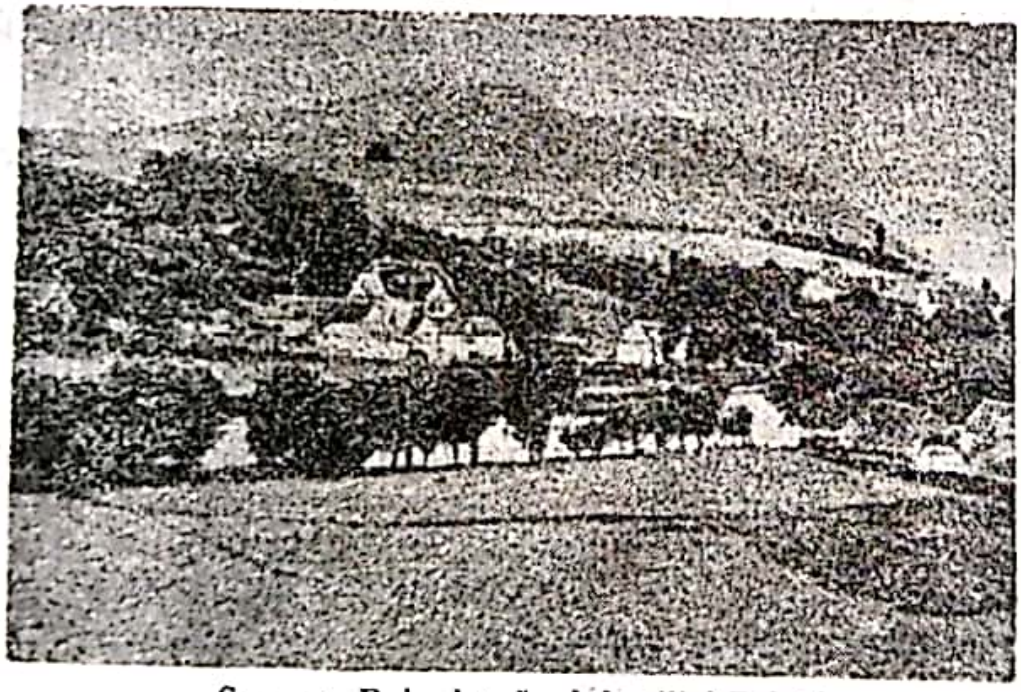
După ce a primit răspunsul lui Gauss, postulatul paralelelor nu a trezit în mintea lui Farkas Bolyai îndoiala cu privire la posibilitatea de a-l demonstra, ci mai degrabă un sentiment de teamă. Peste cîțiva ani, feciorul lui, János Bolyai, va înțelege totul altfel.

„DIN NEANT, UN UNIVERS ÎNTREG"

„Lăsați să-mi ningă veșnicile pe umăr
Ca din cenușă aripa-mi să crească."

Florica Nubert[1]

Cu doi ani mai înainte de a-i fi trimis lui Gauss *Teoria de la Göttingen relativ la paralele*, Farkas Bolyai îi mărturisea tot lui, într-o scrisoare din septembrie 1802: „Fata despre care ți-am vorbit am iubit-o cu toată pasiunea ... m-am căsătorit cu ea și sper să fiu în curînd tată. Mă consider un om fericit" (45). În 15 decembrie 1802 i s-a născut un fiu, János, despre care Gauss avea să afle că era: „un copil



Comuna Buia, leagănul familiei Bolyai

[1] Nubert, Florica (n. 1932), membră a cenaclului VICTOR EFTIMIU din Timișoara

minunat, sănătos, cu trăsături fine, cu părul și sprîncenele negre și ochii de un albastru întunecat, care strălucesc ca două pietre scumpe ..." Desigur că prezența acestui copil în viața lui Farkas-Wolfgang Bolyai — cum se iscălea el cînd publica o lucrare, a risipit îndată umbra amărăciunii pe care o adusese răspunsul lui Gauss cu privire la demonstrația postulatului paralelelor, imaginată de el. Treptat, János pusese stăpînire pe toate simțămintele celor doi soți, lui fiindu-i dăruite toate gîndurile ce le nutreau odinioară unul pentru altul, gînduri de adorare pe care tatăl copilului, pe atunci de 29 de ani, le exprima cîntînd la vioară, iar Suzana, mama copilului, cu 7 ani mai tînără, acompaniindu-l la pian sau fredonînd.

În sufletul lui Farkas Bolyai, Gauss continua să rămînă singurul lui prieten, față de care își deschidea cu aceeași ușurință sufletul, ca odinioară, pe cînd erau studenți, uitînd că vremea care a trecut de la despărțirea lor a ciocănit și în imaginea prietenului. Uita, sau nu putea să-și închipuie aceasta, pentru că de Gauss erau legate singurele zile cu adevărat fericite și fără de grijă din viața lui, pentru că el era „narcoticul" pe care-l folosea în clipele de desperare, provocate de lipsurile materiale ce apăsau din ce în ce mai greu peste el și familia pe care o înjghebase și o iubea (46). De aceea, în 18 decembrie 1807 îi scria din nou, aceluiași Gauss din 1799 : „Familia mea este formată din fiul meu, primul născut (o fetiță mi-a murit), care este inteligent, frumos și puternic, are 5 ani, încă nu-l învăț, dar din joacă a învățat să cunoască multe stele de pe cer și formele geometrice obișnuite. El singur a început să deseneze cu creta pozițiile stelelor de pe boltă ... Îi face mare plăcere să taie cu foarfeca figuri geometrice și odată a tăiat un triunghi dreptunghic dar, fiindcă nu-i vorbisem de formele triunghiurilor, mi-a spus că acesta este un triunghi care seamănă cu o jumătate de dreptunghi ... Se poate ca florile să cadă fără să dea fructe, dar dacă nu mă va înșela speranța, el va veni peste 15 ani la tine, ca să devină elevul tău. Și dacă voi fi sănătos, îl voi însoți și eu ..."

De la vîrsta de 9 ani, János Bolyai a început să studieze matematica sub îndrumarea tatălui său. Pînă atunci, preocuparea lui principală a fost muzica ; vioara o învățase cu tatăl lui, iar pianul cu mama. Dar el se simțea înfrățit cu vioara,

Cei doi Bolyai (Pictură de Bordy Andrée)

ea devenise o parte din sufletul său şi prin ea putea exprima, mai clar decît prin vorbe, toate sentimentele lui. Acompania pe mama lui la pian, cînta alături de tatăl lui la vioară şi compunea unele melodii pline de armonie. În privinţa matematicilor, discuţii avuseseră loc între tată şi fiu şi mai înainte, dar acum stabiliseră un program ce avea să fie respectat cu rigurozitate de ambele părţi. La început au fost programate *Elementele* lui Euclid.

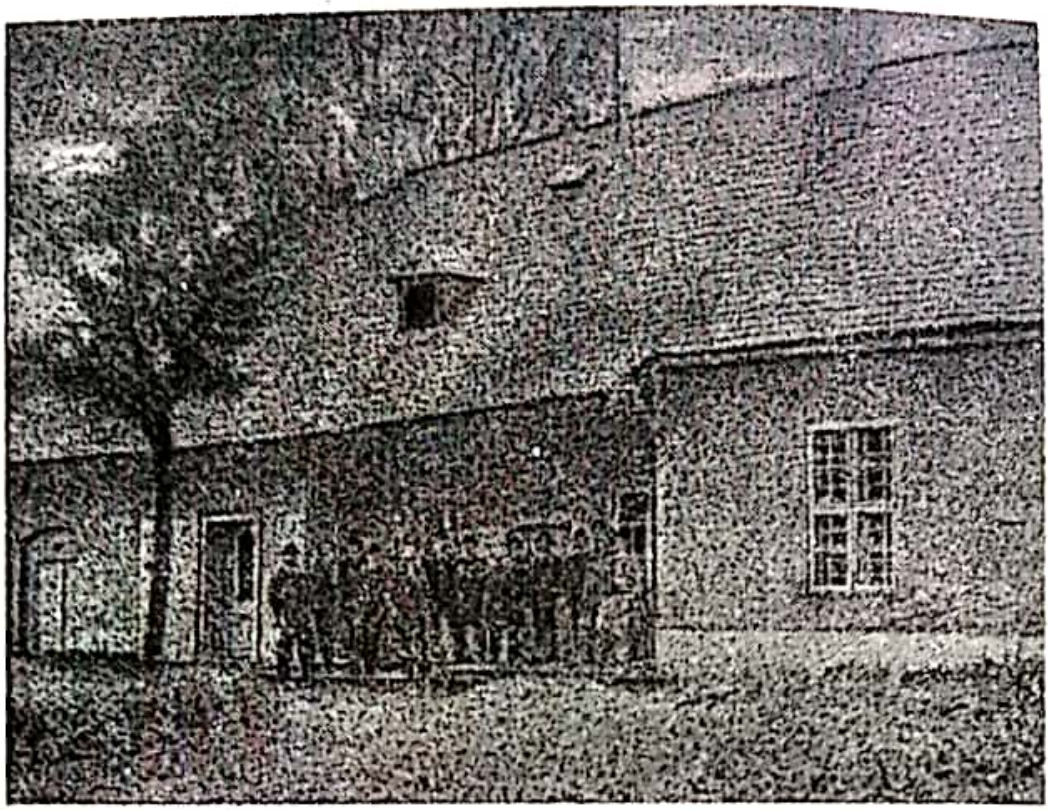
— Mă bucur, tată, că ai hotărît să studiezi *Geometria*. Să ştii că n-am să-ţi cer să descoperi, anume pentru mine, demonstraţii mai uşoare, numai pentru că sînt feciorul tău, aşa cum mi-ai spus că i s-a cerut lui Euclid!

— Cred şi eu, fiindcă ştii răspunsul.

— Ba nu de asta, ci pentru că doresc să o cunosc temeinic!

— Bine, dar nici să nu te gîndeşti să-mi ceri cîte 3 oboli de fiecare lecţie, fiindcă eu n-am sclavi cărora să le poruncesc să ţi-i dea!

— Dacă ţi-ar lipsi numai sclavii, ar fi fost bine, dar tare mă tem că-ţi lipsesc şi obolii!



Casa din Tîrgu Mureș în care a locuit familia Bolyai

Bolyai rîdea fericit. János era, cu adevărat, așa cum îi scrisese cîndva lui Gauss „raza de soare, în noaptea sufletelor noastre". După ce i-a citit primele definiții, János l-a întrerupt :

— Stai, tată, că nu înțeleg nimic. Dacă punctul nu are nici o parte, el nu există și nici linia. Cum vine asta, lungime fără lățime ?

— Da, ai dreptate, așa am gîndit și eu, iar problema aceasta am discutat acolo, la Göttingen, cu Gauss. Cît de mult s-ar bucura el auzind că și tu îți pui aceste întrebări ! Dar lasă, te faci tu mare ! Să știi că la el te voi trimite, să-ți lămurească el tot ce nu voi fi eu în stare !

După ce au fost discutate și explicate cele 23 de definiții din *Cartea I*, au trecut la postulate și axiome.

— *Postulare* este cuvînt latinesc, în greceşte se spune *aitimata* și înseamnă cerere, iar *axios* este cuvînt grecesc și înseamnă *vrednic de încredere*. Meritul lui Euclid este acela că a căutat să așeze toate adevărurile geometrice într-o ordine logică, așa fel ca ele să se poată deduce, unele din altele, pornind de la aceste definiții și adevăruri „vrednice de încre-

dere", adică neavînd nevoie de demonstrație, așa cum au teoremele, i-a spus profesorul.

În timpul lecțiilor de geometrie, Farkas Bolyai a arătat fiului său cîtă frămîntare a stîrnit postulatul paralelelor și astfel, deși dorea să nu trezească curiozitatea feciorului, mai rău i-a ațîțat-o. A făcut-o, după cum a mărturisit-o mai tîrziu János Bolyai în autobiografia lui, tocmai prin căldura cu care i-a vorbit despre această problemă, căutînd să-i explice în ce constă „lacuna și defectul teoriei paralelelor" sau arătîndu-i cîte sforțări zadarnice au fost făcute de mulți matematicieni, și chiar de el însuși, pentru a găsi o demonstrație a acestui postulat. În loc să-l împiedice pe fiul lui „de la orice cercetări în legătură cu acest subiect", el îl împingea cu toată puterea înspre ele. Așa că, din fragedă copilărie, János Bolyai se trezea visînd adesea la demonstrarea postulatului al V-lea al paralelelor.

La 12 ani, János Bolyai trecuse în mod strălucit, nu numai examenele de absolvire a cursului primar, ci și pe acelea ale primelor 6 clase gimnaziale și, după legile existente atunci în Transilvania, era student. El citea și vorbea latinește la fel de bine ca și limba maternă, iar cursurile care se predau la colegiul în care funcționa ca profesor tatăl său nu mai prezentau nici o noutate pentru el (47). Într-o scrisoare pe care Farkas Bolyai a trimis-o, în februarie 1816, unui prieten din Cluj (48), spunea : „Cu aprobarea directorului, János a trecut ieri examenul de fizică, împreună cu ceilalți studenți. Lăsînd deoparte faptul că a fost ascultat de alții, el a răspuns sublim la toate întrebările, chiar în latinește, dovedind ușurință, precizie și modestie."

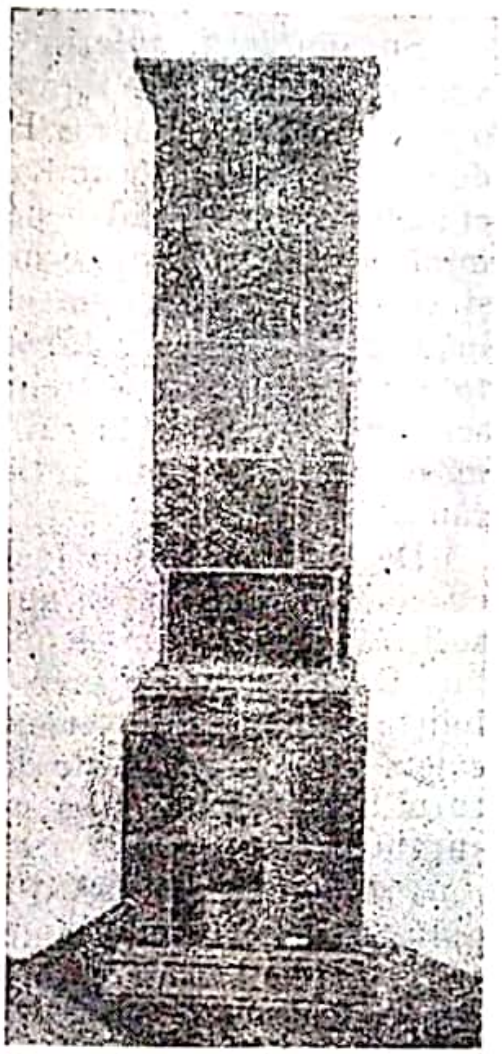
Tatăl și feciorul visau de pe acum că, peste doi ani, vor pleca la Göttingen, la marele Gauss, recunoscut de toată lumea drept *Princeps Mathematicorum*. Deși, la ultima lui scrisoare, Farkas Bolyai nu mai primise nici un răspuns, la 14 aprilie 1816 i-a scris din nou : „Dragă Gauss, îți mai aduci aminte de vocea care te cheamă ? Privește din toamna ta bogată înapoi la primăvara înflorită ! Florile s-au scuturat... cu zgîrcenie m-a răsplătit toamna mea, nu mai sîntem egali, dar sper că am rămas aceiași ! Îndată va veni a doua înflorire. în primăvara veșniciei argintii, și din nou ne vom întîlni ... Atunci îl voi despărți pe tînărul meu Gauss, cel de 20 de ani, de uriașul care s-a dezvoltat peste nivelul meu în ceilalți 20

de ani, pe acesta îl las bucuros altor uriași căci eu îl cer numai pe al meu ... M-a durut mult că nu mi-ai răspuns la scrisoarea pe care ți-am trimis-o ... sîntem ca și cînd am fi murit unul pentru altul, despărțiți nu numai de cîteva mile de spațiu, ci și de timpul atîtor ani. Lasă soarele primăverii să strălucească iar peste gheața bătrîneții care vine ... Ascultă planul meu : fiul meu are acum aproape 14 ani. Cînd a împlinit 9 ani nu știa altceva decît să vorbească și să scrie în limba germană și maghiară sau să cînte puțin la vioară pe note. Am început de atunci cu Euclid, după care l-a cunoscut pe Euler, acum știe din *Vega* (manualul meu din colegiu), nu numai primele două volume, ci se descurcă bine și în volumele trei și patru. Îi place *Calculul diferențial și integral* și calculează cu multă dexteritate, tot așa după cum poate susține un concert de vioară, conducînd cu ușurință arcușul la pasajele mai grele (49) ... Pe János l-am destinat jertfă matematicilor, iar el s-a consacrat lor și cere de la tine, dacă și tu o dorești, ca după doi ani să formezi din el un adevărat apostol al adevărului. Aș vrea să-l ții lîngă tine trei ani și, dacă s-ar putea, în casa ta (vom cîntări sincer și deschis toate circumstanțele), căci nu poți lăsa singur un tînăr de 15 ani, și ca să-l trimit cu supraveghetor nu-mi permit mijloacele. Voi plăti cheltuielile lui și vom discuta împreună toate, atunci cînd voi veni cu el la tine ..."

Niciodată nu a știut Gauss ce rană adîncă și greu de vindecat a deschis în sufletul celor doi Bolyai tăcerea lui. Tot acelui prieten din Cluj se va plînge Farkas Bolyai în 2 aprilie 1817 : „Sînt destul de nenorocit ... Pămîntul mi-a fost ca un pustiu ... numai datoria rece mă mai ține aici și chiar aceasta nu mai poate echilibra durerea ; e ca și cum soarta fiului meu mi-ar fi pus lanțuri care mă țin în închisoare ..."

În iunie 1817, János a trecut cu succes examenul de bacalaureat, dar drumul la Göttingen îi era închis. „Sărăcia îți atîrnă plumb de călcîie", scria Farkas Bolyai adăugînd : „în această perioadă de constrîngere, pe fiul meu nu-l pot trimite mai sus... ca să-l trimit la Academia tehnică militară din Viena (50) unde desigur că pînă acum nu a mai fost o asemenea lumină... aș avea nevoie de 8 000 de guldeni". Totuși, în cele din urmă, Farkas Bolyai a reușit să obțină acești bani, aproape de 5 ori cît salariul lui anual, donați de cîțiva bogătași din Cluj, care-l stimau, și în toamna

Sobă construită
de Farkas Bolyai



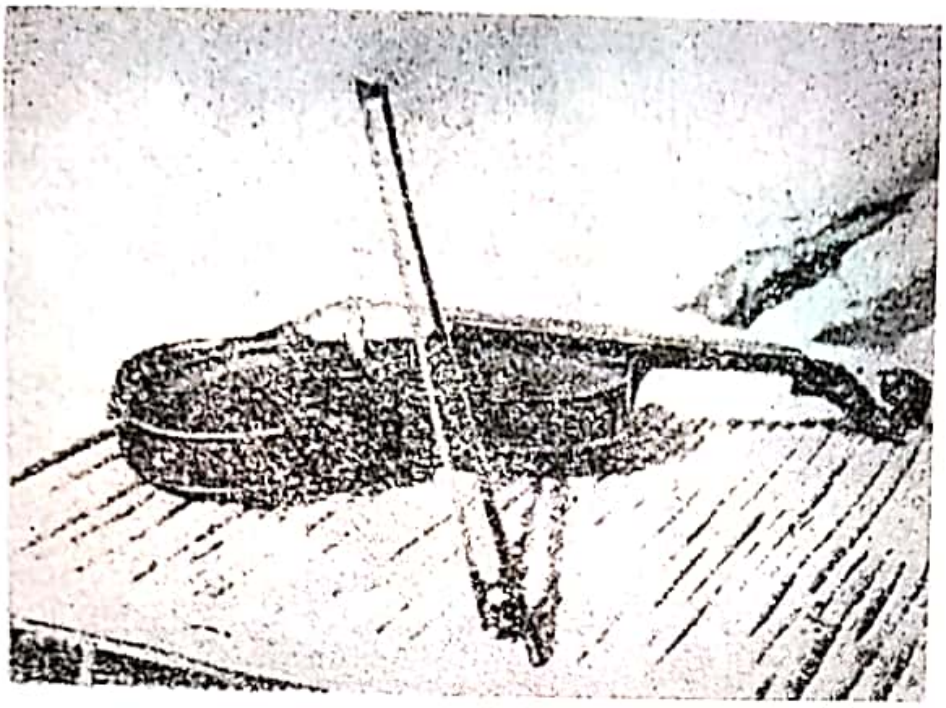
anului 1818 János a fost înscris ca elev în clasa a IV-a la Academia tehnică militară din Viena. Nu împlinise 16 ani și pînă atunci nu mai stătuse departe de casă. Cu colegii s-a obișnuit repede și, prin cunoștințele lui sistematice în toate domeniile, prin talentul lui la matematici, s-a situat, de la început, printre primii din clasă. Dar îi era dor de casă, de discuțiile cu tatăl lui și de tovărășia mamei. Același dor lăsase în urma lui și în Tîrgu Mureș. Farkas Bolyai avea cum să-și stăpînească dorul: greutățile materiale generate de criza economică, tot mai greu de suportat, îl obligau să caute de lucru și în afara lecțiilor. Avînd o predispoziție vădită pentru tehnică (51), se specializase în construcții de „sobe" cu consum redus și în plus scria diferite tragedii și alte lucrări literare, prin publicarea cărora completa acel minim necesar vieții.

Suzana însă, suferind și de o boală incurabilă pe acea vreme, nu a putut lupta contra acestui dor. După un an, o scrisoare a lui Farkas Bolyai către Paul Bondor, prietenul de la Cluj și editorul lucrărilor lui literare, descria starea ei : „Boala a zdrobit-o pe nevasta-mea... nu doarme săptămîni întregi, slăbește, e mereu neliniștită, se teme de moarte și se lasă copleșită de această stare, ruinîndu-se pe ea și întreaga ambianță... János nu mai scrie de trei luni și jumătate nimic, deși ar fi trebuit să-mi răspundă la multele mele scrisori... Oricum, lucrurile nu-s bune, dar despre acestea nu-i mai spun nimic soției mele, ca să nu o tulbur și mai rău..."

De fapt, cu János lucrurile erau bune. El se acomodase cu viața de internat și nu se mai grăbea să răspundă la scrisori, fiindcă nu știa și nu bănuia nimic din tragedia mamei lui. Dealtfel, peste vreo trei săptămîni, Farkas Bolyai se liniștise în privința feciorului : „Fiul meu mi-a trimis două caiete cu desene, peste măsură de bune... dar numai conturul. În toamnă, mi-a promis că îmi va trimite altele hașurate și estompate."

Printre hîrtiile lui Farkas Bolyai s-a găsit următorul portret psihologic al fiului său, pe care-l făcuse în august 1817, așadar cu un an înainte de a pleca la Viena : „Are înclinări deosebite pentru știință și mai ales pentru matematici. În muzică, și în special în violină, poate fi un virtuos. Și pentru desen are oarecare înclinații. Pentru poezie nu are nici una. Are un frumos discernămînt și o putere de judecată justă față de oameni și lucruri. Nu-i urît și nici antipatic. Este capricios, cu toane, uneori nu-și face lecțiile, alteori stă mai mult decît trebuie, de dimineață pînă noaptea tîrziu. Uneori este ipohondru (melancolic), alteori prea vesel. Sîciie cu plăcere pe alții. E necopt, uneori nesupus, mai ales față de mamă. Nu ponegrește niciodată pe altul; dacă nu poate vorbi de bine, tace. Nu spune minciuni. E milostiv și duios. Nu-i zăpăcit".

Portretul se arăta să fie întocmai cu modelul. După doi ani, prin luna martie 1821, Paul Bondor află că János o ducea bine cu școala, că fusese remarcat la studii de către profesori și de către general, că stăpînea bine desenul, iar la muzică avea doar un singur concurent, care însă lua lecții cu primul violonist din Viena. „Fiul meu nu-i în stare să plă-



Vioara lui János Bolyai

tească lecţii particulare, însă acela care cîntă ceva mai bine decît el îl ia duminica cu dînsul şi, împreună cu un altul, fac cel mai frumos trio. Pentru el, această invitaţie înseamnă un bun exerciţiu, fără să coste bani" (52).

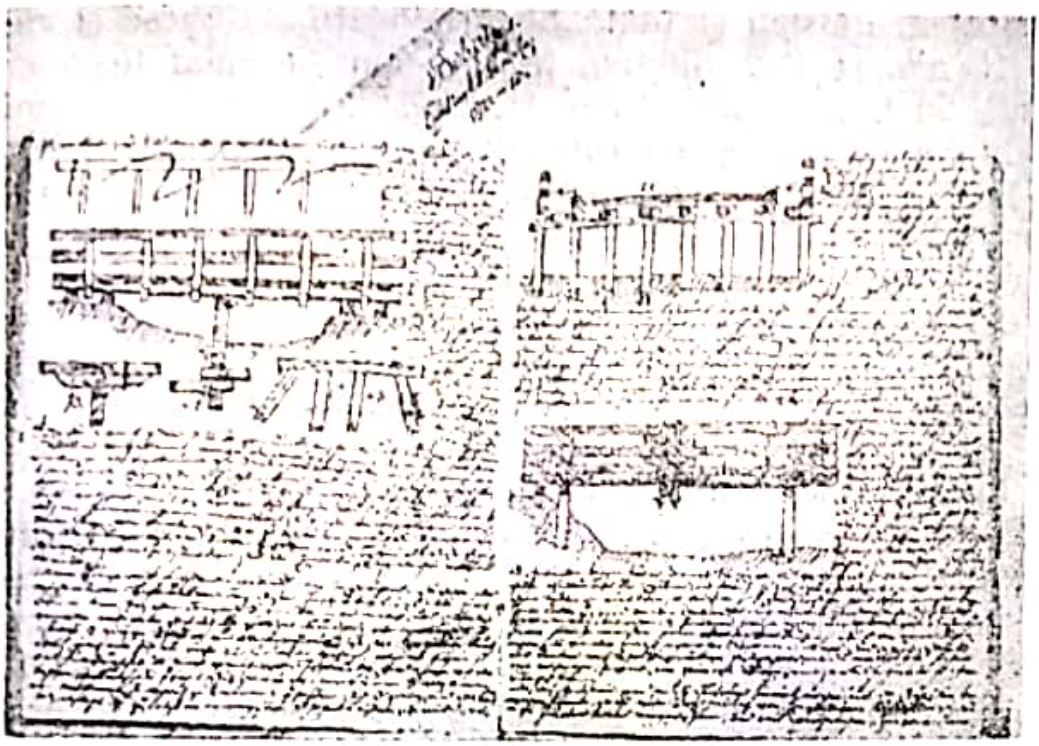
Asemenea veşti bune au înviorat-o şi pe Suzana, dar nu pentru multă vreme. O scrisoare, din 10 octombrie 1821, îl anunţă pe Paul Bondor că Suzana Bolyai a murit (53). Cînd această veste a ajuns la János Bolyai, faptul se săvîrşise de mult. Durerea ce a simţit-o pentru moartea mamei se transmuta, pe încetul, într-o milă adîncă faţă de tatăl lui, rămas singur. Şi fiindcă ştia că nimic nu l-ar interesa mai mult decît problemele de matematici, despre care discutaseră odinioară împreună, s-a hotărît să-i trimită, cît mai repede, soluţiile problemelor la care se gîndise aici. Printre acestea erau şi unele în legătură cu teoria liniilor paralele, teorie care îl obseda tot cu mai multă stăruinţă.

Adresa din 6 septembrie 1822 a Academiei militare tehnice din Viena către forurile superioare arată că Johan Bolyai de Bolya era al doilea dintre cei 19 elevi ce au promovat cursurile clasei a VII-a a Academiei. Primii şapte absolvenţi, în ordinea clasificării, au fost propuşi să rămînă în cadrul corpului de geniu al armatei din Viena, cu titlul

János Bolyai

de cadeţi. Deşi numirea în Corpul de cadeţi nu atrăgea după sine şi avansarea ca ofiţer în corpul de ingineri, la 1 septembrie 1823, cadetul J. Bolyai de Bolya, „datorită cunoştinţelor sale şi bunei sale purtări morale", a fost numit sublocotenent în corpul de ingineri şi repartizat la Direcţia fortificaţiilor din Timişoara. Această numire l-a bucurat îndeosebi pe Farkas Bolyai (54). Totodată, Direcţia fortificaţiilor din Timişoara şi-a pus mari speranţe în tînărul ofiţer care întrecuse la examenul de Teoria fortificaţiilor şi de arhitectură chiar pe şeful de promoţie. Acest ofiţer însă era preocupat de problema dreptelor paralele şi nu de lucrările de fortificaţii.

Aşa a început tragedia (55). Nu trecuse nici o lună de cînd venise la Timişoara şi János Bolyai a întrezărit drumul înspre problema liniilor paralele. Era emoţionat de cele ce zărise şi cui altuia i-ar fi putut destăinui toată tulburarea lui decît aceluia care l-a îndrumat întîia oară către această beznă vrăjită ? „Dragă şi bunule tată", aşa a început el scrisoarea din 3 noiembrie 1823, fantastica scrisoare ce l-a uluit pe Farkas Bolyai, fiindcă nu putea crede că fiul lui a reuşit să afle adevărul pe care atîţia alţii, şi chiar el însuşi,



Note de curs ale cadetului Bolyai János

îl căutaseră în zadar. Şi totuşi, aşa era, fiul său îi scria clar : „Am de spus atît de multe despre noile mele descoperiri că nu pot să mă descurc decît neadîncind nimic şi scriindu-ţi doar pe un sfert de coală. Hotărîrea mea rămîne neclintită, voi publica o lucrare despre teoria paralelelor, îndată ce voi fi pus materialul în ordine şi împrejurările o vor permite. În această clipă nu sînt gata, însă calea pe care am apucat-o promite aproape cu siguranţă atingerea ţintei, dacă aceasta este în adevăr posibil. N-am atins ţinta, dar am descoperit lucruri aşa de sublime şi care m-au uimit într-atît, că ar fi o pagubă nespus de mare dacă ele s-ar pierde. Vei recunoaşte-o singur, scumpul meu tată, cînd vei vedea. Acum nu pot să-ţi spun mai mult decît că eu am creat *din neant un univers întreg*. Tot ce ţi-am trimis pînă acum este ca o casă de carton faţă de un turn. Şi sînt aşa de sigur că aceasta îmi va face onoare, ca şi cum totul s-a şi întîmplat".

Deşi îşi iubea fiul şi avea încredere în el, admirîndu-i calităţile de matematician, se adeverea din nou proverbul că „nimeni nu-i proroc în ţara lui", fiindcă Farkas Bolyai, în loc de încurajare şi freamăt de fericire, îi arată neîncredere, îşi exprimă frica şi groaza ca în faţa unui dezastru : „Te implor, lasă teoria paralelelor în pace, prin ele vei pierde

sănătatea, liniștea și toată bucuria vieții... Cunosc și eu această noapte fără lumină, în care am îngropat fiecare luminiță și bucurie a vieții mele. Acest întuneric fără lumină poate înghiți o mie de turnuri Newton și niciodată nu se va face lumină pe acest pământ, niciodată nenorocita speță umană nu va atinge adevărul pur, nici chiar în geometrie. Și eu eram gata să devin martirul unui adevăr, numai ca să curăț geometria de această pată și să las omenirii o știință fără contradicții. Am depus o muncă de uriaș, am găsit unele rezultate mai bune decît acelea de pînă atunci, însă nu am obținut o satisfacție deplină".

Farkas Bolyai judeca la fel cu toți acei oameni care nu fuseseră în stare să vadă *adevărul*. Numai János Bolyai singur *știa* că a construit *o nouă geometrie*, adevărată în mod absolut, adică independent de faptul că postulatul paralelelor este sau nu adevărat. *El singur a înțeles* că intuiția nu poate decide nimic în legătură cu exactitatea sau neexactitatea acestui postulat și că, din punct de vedere logic, el avea libertatea să aleagă una oarecare din următoarele trei ipoteze :

1) într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă,

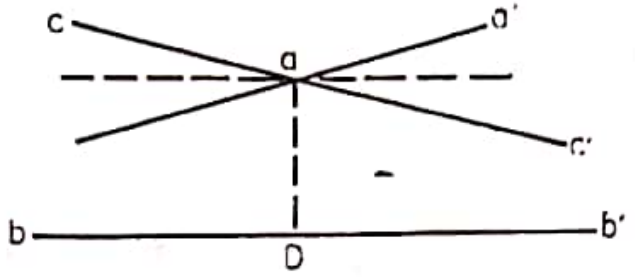
2) într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se pot duce cel puțin două paralele la acea dreaptă,

3) într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte nu se poate duce nici o paralelă la acea dreaptă.

Prima dintre aceste ipoteze a folosit-o Euclid ; ea corespunde noțiunii intuitive despre plan, așa cum s-a folosit ea și s-a transmis din generație în generație. El s-a hotărît să aleagă ipoteza a doua. Această ipoteză nu mai poate să corespundă aceleiași noțiuni intuitive despre planul ce-l avem mereu în fața ochilor noștri, căci, în nici un plan pe care îl concepem prin simțurile noastre, dintr-un punct exterior unei drepte, *nu se pot duce două sau mai multe paralele la acea dreaptă* ; dar din punct de vedere logic, acest lucru este cu putință, de îndată ce planul ar fi *altfel construit* decît al nostru. În acel plan, nu se va vorbi chiar despre *drepte paralele*, ci de ceva asemănător cu ele, într-un sens mai larg, așa cum ar fi, de pildă, asimptotele. S-ar putea imagina, în acest caz, următoarea definiție : Raza *aa'* se numește asimptotă cu *bb'*, dacă nu se întîlnește cu *bb'*

oricît s-ar prelungi. Iar în privința ipotezei, sau a *postulatului* ales de Bolyai, el ar apărea astfel: prin punctul *a*, exterior dreptei *bb'*, să ducem perpendiculara *aD* pe *bb'*. Conform ipotezei, există cel puțin încă o asimptotă *cc'* care

Fig. 8



trece prin *a* și nu întîlnește *bb'*, oricît s-ar prelungi. Rezultă însă de aici că toate dreptele cuprinse în interiorul unghiului *a' ac'* nu intersectează dreapta *bb'*, așadar admițînd că, dacă printr-un punct exterior unei drepte se pot duce două paralele sau asimptote la o dreaptă, atunci se pot duce o infinitate de asimptote la acea dreaptă.

Desigur că desenul de față, în acest caz, nu mai reprezintă imaginea planului considerat de Bolyai și nu ne permite să sesizăm, *intuitiv*, această ipoteză, ci numai să o traducem, în mod cu totul necorespunzător faptului, fiindcă noi ne folosim de *planul euclidian* în loc de *planul lui Bolyai*, care nu poate fi desenat. Lăsînd neschimbate toate celelalte postulate ale lui Euclid și înlocuind postulatul al V-lea prin acesta amintit aici, János Bolyai a creat o nouă geometrie, o geometrie neeuclidiană. Ca să-și convingă tatăl de adevărul spuselor sale cu privire la teoria paralelelor, el s-a hotărît să plece la Tîrgu Mureș, deși lucrul era destul de greu de înfăptuit (56).

Trecuseră șase ani de cînd părăsise casa părintească și, în acest timp, avuseseră loc multe schimbări printre care și recăsătoria lui Farkas Bolyai (57). Venirea lui acasă a fost un dezastru și János Bolyai a plecat la Timișoara, lăsînd manuscrisul redactat în prima formă tatălui său, cu care va mai păstra, de aici înainte, puține legături, privind mai ales domeniul matematicilor.

Farkas Bolyai nu a putut înțelege nici acum frumusețea descoperirii fiului său și astfel a distrus și ultima lui iluzie care-l mai lega de copilăria ce fusese odinioară atît de lumi-

noasă. Rezultă din scrisoarea ce i-a trimis-o după ce a plecat: „Dacă mi-ar fi reușit să pun la punct teoria liniilor paralele, aș fi devenit alt om, nu m-aș fi căsătorit de două ori, nu m-aș fi dedicat grădinăritului, poeziei, olăritului, ca să-mi găsesc astfel satisfacție în altă parte. Aș fi devenit un om mai bun din punct de vedere moral, aș fi făcut mai bine față în serviciu și în viața casnică. Cine-i fericit poate ușor să-i facă și pe alții fericiți. Ce poate curge dintr-un izvor care este el însuși secat? Nu mai pierde nici un ceas cu paralelele, premiu nu-ți vor aduce și de otrăvit îți vor otrăvi toată viața".

Răspunsul lui János Bolyai îl găsim printre filele unei autobiografii rămasă în manuscris: „Nici un obstacol, oricît mi-ar fi părut de netrecut, nu mi-a potolit curajul... Consolîndu-mă cu cuvintele lui Seneca: „*Suspice viros*... (adică stimează bărbații ambițioși chiar în căderea lor) am atacat problema cu dorințe mereu sporite și astfel, printre lupte duse cu rezultate dubioase, după unele victorii și ocupări parțiale de teren, am reușit, în 1823, să străpung și să cuceresc această cetate de pe stîncă și apoi să o ocup definitiv, fundînd astfel o știință nouă, nebănuită nici măcar în concepția ei, știința spațiului". Și poate, fiindcă János Bolyai *știa* că ceea ce crease el reprezenta „o știință nouă, nebănuită nici măcar în concepția ei", oricît de apăsătoare și dureroase îi erau cuvintele tatălui său, ele nu-l puteau supăra, ci numai amărî. Era cumplit de amărît că-i *singur pe lume* și că nici el nu-l putea înțelege și ajuta.

În cursul anilor 1825 și 1826 nu a trăit decît cu opera sa în minte. Căuta cu pasiune să-i dea cea mai precisă formă și cea mai prescurtată cu putință, înlănțuind toate teoremele stabilite, într-un tot armonios. Ștergea orice cuvînt ce i se părea de prisos, iar noțiunile noi le reducea la o literă sau la un simbol. Nici o clipă nu s-a gîndit că în această formă schematizată, extrem de concentrată, lucrarea sa va fi greu de urmărit nu numai de un profan, dar și de un cititor obișnuit cu textele matematice. Din contra, acest simbolism și această formă concisă îl satisfăceau tot așa de mult ca și eleganța sobră a unei opere de artă. Abia așa a considerat el că lucrarea era încheiată și a trimis-o din nou tatălui său (58). De data aceasta, Farkas Bolyai a înțeles-o și prin ea s-a deșteptat din nou în el elanul și dra-

Tentamen (Ediția a II-a, cu portretul lui Farkas Wolfgang Bolyai, 1897)

gostea pentru matematici. Se hotărăște, plin de entuziasm, să-și reia vechile preocupări filozofice despre matematică și să scrie un vast tratat în care să prezinte toate teoremele din aritmetică și geometrie, analizate pe baza noțiunilor ce stau la baza lor, pe baza definițiilor și a axiomelor de care sînt legate. Numele acestei opere, ce a fost scrisă în latinește și a apărut în două volume, primul în 1832, era *Tentamen*... adică „Încercare de a prezenta tineretului studios elementele de matematică pură, elementară și superioară, printr-o metodă intuitivă, potrivită cu acest scop". Aflînd despre acest plan, János Bolyai i-a propus tatălui său să-i traducă și lucrarea lui în latinește și să i-o tipărească în primul volum din *Tentamen* ca o anexă a lui, hotărînd să suporte el cheltuielile suplimentare. Dar planurile, puse la cale în 1826, aveau să se înfăptuiască abia în anul 1831.

În anul 1830, Farkas Bolyai a terminat traducerea în latinește a anexei, lucrare în care era expusă „Știința absolut adevărată a spațiului, indiferent de adevărul sau falsitatea axiomei a XI-a a lui Euclid, care nu poate fi decisă niciodată apriori; pentru cazul falsității fiind adăugată

cuadratura geometrică a cercului". O prețuia și s-a hotărît să tipărească cîteva exemplare în broșură separată, mai înainte de a apărea în volum, fiindcă se temea să nu se mai găsească cineva care să publice înaintea fiului său aceleași idei și să-i fure „prioritatea", el fiind convins „că ar fi oarecare adevăr în observația că unele lucruri par să aibă epoca lor, cînd apar deodată în locuri diferite".

În luna iunie 1831 au apărut primele exemplare din *Știința absolut adevărată a spațiului*. Cărticica, avînd 26 de pagini, tipărită la Tîrgu Mureș, avea să parcurgă un drum lung, pînă la Lemberg, înainte de a ajunge în posesia autorului, care, din cauza ei, fusese mutat, din motive de sănătate cît și disciplinar, din Timișoara la Arad și apoi de aici la Lemberg (59).

După dorința lui János Bolyai, Farkas a expediat un volum, împreună cu o scrisoare, la Göttingen. Trecuseră 23 de ani de cînd nu mai primise nici o veste de la prietenul său și 15 ani de la *scrisoarea aceea* la care nici nu îndrăznea să se mai gîndească! Se poate vedea, din rîndurile acestei scrisori, cît de greu îi venea acum să facă voia fiului său, dar trebuia să o facă. „Dragă Gauss", nu-i mai venea să scrie; așa că a început cu: „Prea stimate Gauss", continuînd stingherit: „Iartă-mă că te tulbur din drumul tău de pe culmi, fă o mică oprire și dăruiește un minut prieteniei... De la echinocțiul de primăvară pînă după echinocțiul de toamnă am fost toată vara (cel puțin aparent) morți unul pentru altul. De multe mii de ori m-am gîndit la tine, și nu mă îndoiesc că și tu, chiar prins de marile tale preocupări, te-ai gîndit uneori la mine, deși acestea te-au împiedicat să-mi răspunzi la ultimele scrisori (cu ultima scrisoare ți-am trimis o frumoasă și veritabilă pipă din spumă de mare) (60). Soția mea a murit de 10 ani, a rămas un băiat, a cărui plecare la Viena, la Academia de ingineri, a pricinuit pierderea minții ei. Acesta e acum locotenent în corpul de geniu și va deveni curînd căpitan; e un tînăr frumos, virtuos în violină, un tare și brav spadasin, însă s-a duelat prea des și este pe deasupra un soldat prea sălbatic, deși, totodată, și un om foarte delicat, — lumină în întuneric și întuneric în lumină. Acum e în garnizoană la Lemberg, are o mare admirație pentru tine și e capabil să te înțeleagă și să te prețuiască. La rugămintea lui, îți trimit această broșură

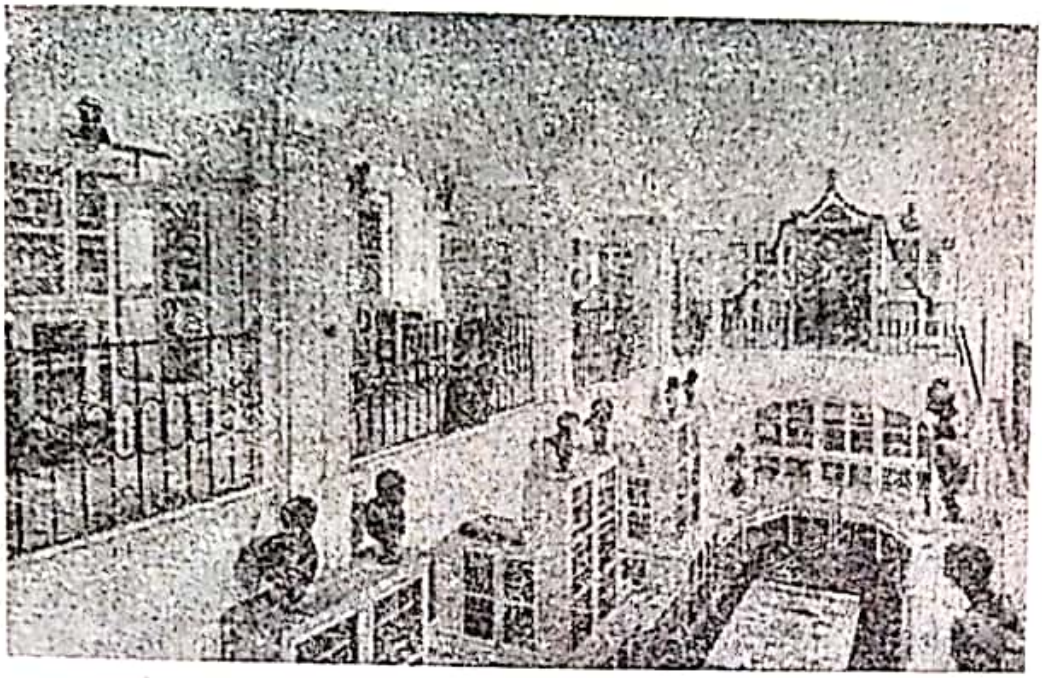
compusă de el; ai bunătatea să o judeci cu vederea ta așa de pătrunzătoare și, în răspunsul tău, pe care îl aștept și eu cu nerăbdare, scrie-mi părerea ta fără nici un fel de cruțare... Fiul meu ține la părerea ta mai mult decît la aceea a *întregii Europe...*"

Scrisoarea a rămas din nou fără răspuns și fiindcă tocmai atunci bîntuise o epidemie de holeră, Bolyai a presupus că din această cauză ea nu ajunsese la Gauss. De aceea, în 16 ianuarie 1832 îi scrie din nou, trimițîndu-i *Tentamen*, care cuprindea *Appendix*-ul fiului său: „Preaonorat prieten, ți-am mai trimis o dată această broșură cu prima scrisoare, dar nu știu ce s-a întîmplat din cauza acestei fatale holere. Acum ți-o trimit din nou prin poștă și cu recipisă. Fiul meu nu a fost de față cînd i s-a tipărit lucrarea și și-a corectat greșelile în erata de la sfîrșit. Eu le-am corectat pe cele mai multe cu condeiul, ca să te feresc de această plictiseală. El îmi scrie din Lemberg că de atunci a mai găsit multe demonstrații, mai simple și mai elegante, despre imposibilitatea de a stabili apriori dacă axioma a XI-a este adevărată sau nu. Iartă-mă din cauza inoportunității mele, dar fiul meu ține mai mult la judecata ta decît la aceea a Europei și o așteaptă cu nerăbdare. Te rog din suflet să-mi faci cunoscută părerea ta pe care o voi scrie îndată la Lemberg. Rămîn pentru totdeauna prietenul tău sincer, Wolfgang Bolyai".

În ziua de 6 martie 1832, Wolfgang Bolyai a primit răspunsul atît de așteptat: „Prin amîndouă scrisorile tale m-ai bucurat, prieten neuitat. Am întîrziat cu răspunsul după primirea primei scrisori, întîi fiindcă așteptam și lucrarea și apoi fiindcă eram, din cauza unor chestiuni familiale, într-o mare tulburare, cu consecințe ce au putut fi evitate cu timpul, însă cauzele ei continuă să dureze și cu greu vor putea să dispară cu totul înainte de sfîrșitul meu... Acum despre lucrarea fiului tău. Dacă aș începe spunînd că *nu trebuie să laud această lucrare*, vei fi pentru o clipă surprins, dar nu pot spune altfel; să o laud înseamnă să mă laud pe mine însumi, căci întregul conținut al lucrării, drumul pe care l-a ales fiul tău și rezultatele la care a ajuns coincid aproape pe de-a-ntregul cu meditațiile mele proprii, care m-au preocupat în parte, acum vreo 30—35 de ani. De aceea sînt și eu foarte mirat. Din lucrarea mea personală

am pus pînă acum puține pe hîrtie, hotărîrea mea asupra acestor cercetări fiind să nu divulg nimic cît trăiesc. Majoritatea oamenilor nu înțeleg aceste probleme și am întîlnit puțini dintre cei cărora le-am comunicat cîte ceva din aceste idei care să manifeste interes pentru ele. Căci problemele acestea ar putea deveni interesante numai pentru acei care ar înțelege tocmai ceea ce lipsește aici, or în această privință cei mai mulți dintre oameni sînt complet nedumeriți. Intenția mea era ca totuși să le scriu cîndva în așa fel, ca cel puțin să nu dispară odată cu mine. De aceea, am fost foarte surprins că această osteneală îmi este înlăturată și am o mare bucurie că tocmai fiul vechiului meu prieten mi-a luat-o înainte într-un mod așa de remarcabil. Însemnările le găsesc foarte precise și indicate să scurteze textul: totuși cred că ar fi bine ca pentru anumite noțiuni principale să nu fie date numai semne sau litere, ci și o anumită terminologie, și eu m-am gîndit de multă vreme la asemenea numiri. Atîta vreme cît nu faci alta decît să te gîndești la probleme cu ajutorul direct al intuiției, nu trebuie nici numiri nici semne; dar ele devin necesare cînd vrei să le lămurești și altor oameni. S-ar putea da, de pildă, suprafeței pe care fiul tău o numește *F*, numele de *parasferă*, liniei *I*, numele de *paraciclu*; ele sînt, de fapt, suprafața sferei și lungimea cercului de rază infinită. Tot așa s-ar putea numi *hiperciclu* complexul tuturor punctelor care sînt la aceeași distanță față de o dreaptă situată în același plan cu ele; la fel s-ar putea vorbi de o *hipersferă*. Dar toate acestea nu sînt decît lucruri secundare, fără importanță; principalul este fondul și nu forma.

În multe părți ale acestor cercetări eu am ales altă cale. Ca, de exemplu, alătur aici o demonstrație pur geometrică (schițată în linii generale) a teoremei că mărimea cu care diferă suma unghiurilor unui triunghi de 180° este proporțională cu aria triunghiului... Am schițat numai demonstrația fără să-i fi dat și șlefuiala necesară pentru care acum nu mai am timp. Ai libertatea să o comunici fiului tău. În orice caz, te rog pe tine să-l saluți cordial din partea mea și să-l asiguri de deosebita mea considerație. Propune-i totodată să se ocupe de problema următoare: Să se calculeze volumul tetraedrului (spațiul mărginit de patru plane)..."



Biblioteca Teleki din Tîrgu Mureș

Acestea erau observațiile lui Gauss cu privire la lucrarea lui János Bolyai; scrisoarea însă nu se termină aici, ci prin alte reveniri la amintiri comune.

János Bolyai a primit scrisoarea tatălui său, care conținea și o copie a răspunsului primit de la Gauss, în 6 aprilie 1832. Cu trei săptămîni înainte fusese avansat la gradul de căpitan, acum primea o scrisoare de la Gauss. Nu-i venea să creadă că ar fi posibilă atîta fericire, dar nici nu bănuia că din nou Gauss va sfărîma cu răspunsul lui bruma de echilibru și de liniștire ce se aciuase, aici, în Lemberg, în sufletul așa de agitat al lui János Bolyai. Cu totul altul era răspunsul pe care-l așteptase el cu atîta răbdare. Din scrisorile pe care i le citise odinioară tatăl lui, mai ales din aceea din noiembrie 1804, el știa că Gauss nu reușise să treacă „acele stînci care făcuseră să naufragieze și încercările tatălui său", că „*avea doar speranța* că le va putea trece, înainte de sfîrșitul vieții" și acum, dintr-o dată, el afirma că „au mers pe același drum", că „rezultatele la care a ajuns el, coincid cu ale lui" și încă „stabilite cu 30 — 35 de ani în urmă"! Desigur că o făcea, își zicea János Bolyai, numai ca *să-i fure prioritatea!* Trăise din 1823 și pînă acum, adică timp de 9 ani, cu iluzia că *el și numai el singur* „a scos din neant un univers întreg" și aștepta de la Gauss această re-

cunoaștere, iar acum se vedea dintr-o dată deposedat de tot ce avea el mai scump în viață! Și de cine? De cel mai înzestrat dintre matematicieni, care poseda atîtea titluri de prioritate, de acel vanitos cu numele de Gauss! Ce-i mai rămînea de făcut, de acum înainte, decît o luptă deschisă, pe viață și pe moarte cu el, ca să arate lumii întregi că poate face mai mult decît Gauss, că poate revizui întreaga știință a geometriei? Dar pentru aceasta îi trebuia timp și mai ales liniște. Nu trebuia să mai fie sîcîit cu fleacurile legate de serviciu, va cere imediat un concediu de studii pe timp de trei ani și astfel va arăta ce poate!

Frămîntat și înnebunit de asemenea gînduri, simțea că totul se prăbușise în jurul lui, era singur și împietrit într-un pustiu, unde numai o voce răsuna batjocoritor: „Oricum, te rog să-l saluți cordial pe fiul tău din partea mea și să-l asiguri de deosebita mea stimă". De ce n-a scris: „Spune-i fiului tău să vină la mine, fiindcă doresc să-l cunosc și să vorbesc cu el"? N-ar fi fost fericire mai mare pentru János Bolyai decît această chemare așa de îndelung visată. Acum sufletul lui se agita cumplit, avea febră și capul îi vîjîia ca o cascadă. Ținînd strîns gîtul viorii în mînă, s-a prăbușit în întuneric.

Printre manuscrisele de la Biblioteca Academiei de științe din Budapesta se găsesc și unele certificate medicale care arată că János Bolyai se afla, începînd de la jumătatea anului 1832, într-o stare de nervi sau de ipohondrie care îl făcea inapt pentru serviciul militar (61). În 20 martie 1833 fusese întocmit și raportul de pensionare. Pe data de 12 aprilie, nemulțumit de pensia ce i se acordase, căpitanul János Bolyai solicita mărirea pensiei, dar cererea i-a fost respinsă. Astfel, cu data de 11 iunie 1833, el a fost pensionat, în mod definitiv, fiind în vîrstă de 31 de ani.

O ATITUDINE BIZARĂ

„A face rău, chiar nevrînd, la acel pe care-l iubim, este durerea cea mai mare pe care o poate simți cineva."

C. Negruzzi[1]

Acea scrisoare de recunoaștere a meritelor lui, pe care János Bolyai o aștepta de la Gauss, scrisoare ce ar fi putut schimba cursul vieții acestui om obosit de o atît de îndelungată așteptare, exista. O scrisese chiar Gauss, cu o lună mai devreme de a fi răspuns lui Farkas Bolyai, însă o adresase altcuiva. Despre existența și cuprinsul ei nu aveau să afle niciodată, nici tatăl și nici fiul, fiindcă această scrisoare, împreună cu altele, au fost cunoscute și publicate după mulți ani de la moartea lui. Iată ce scria Gauss, în luna februarie a anului 1832, fostului său elev, matematicianul Ch. L. Gerling (1788 — 1864), pe atunci profesor de astronomie la Universitatea din Marburg: „Zilele acestea am primit o mică lucrare despre geometria neeuclidiană în care am găsit toate ideile și rezultatele mele proprii, deduse cu multă eleganță, deși, din cauza formei concentrate, ceva mai greu de urmărit pentru cineva străin de acest subiect. Autorul este un foarte tînăr ofițer austriac, fiul unui prieten al meu din tinerețe, cu care discutam adesea aceste probleme prin 1798, pe cînd ideile mele erau departe de a fi ajuns la maturitatea la care a ajuns acest tînăr prin propriile lui gînduri. Îl consider pe acest tînăr geometru von Bolyai ca pe un geniu de prima mărime"

Păcat că această scrisoare nu a fost cunoscută de Bolyai în timpul vieții sale. După *această* prețuire a lui Gauss tînjea sufletul chinuit al tînărului Bolyai. Cită bucurie i-ar fi

[1] Negruzzi, Costache (1808—1868), scriitor român.

adus aceste rînduri dacă i-ar fi fost adresate lui sau dacă ar fi știut ceva despre acel sincer și spontan elan de admirație, pe care marele Gauss a căutat să-l împărtășească cuiva! Nici Gauss nu avea să bănuiască vreodată cîtă durere a putut pricinui acestui „geniu de prima mărime" care, în naivitatea lui, l-a adorat cu tot atîta patimă cu cît l-a și urît după aceea, și nici ce influență nefastă a avut tăcerea și rezerva pe care a arătat-o în scrisoarea trimisă lui Farkas Bolyai. Faptul că Gauss s-a adresat întîi lui Gerling și abia mai tîrziu lui Wolfgang Bolyai ar putea fi explicat fie printr-o inerție sufletească în urma zecilor de ani de întrerupere a corespondenței, fie prin ciudata surpriză a coincidenței dintre rezultatele obținute de János Bolyai și Gauss.

Numai cu o lună mai înainte de a fi primit scrisoarea lui Bolyai, Gauss scria prietenului său, H.K. Schumacher (1780 — 1850) : „De cîteva săptămîni am început să pun pe hîrtie cîteva rezultate din propriile mele meditații asupra geometriei neeuclidiene care-și are originea, în parte, în meditațiile de acum vreo patruzeci de ani, dar despre care n-am scris niciodată nimic. Totuși n-aș vrea ca aceste gînduri să piară odată cu mine". Așa se explică și faptul că a citit imediat, cu ușurință și interes, lucrarea trimisă de Wolfgang Bolyai, deși ea era „scrisă într-o formă prea concentrată pentru cineva străin de acest subiect".

Cu Gerling, Gauss era în corespondență, tocmai pe această temă, de mulți ani, din 1818, de cînd i se dăduse să revadă un curs de *Geometrie* care circula pe atunci. Adresîndu-se profesorului său, el îi cerea îndrumări cu privire la teoria paralelelor : „Cred că ar trebui să expun teoria paralelelor după Euclid, arătînd totuși insuficiența acestei metode. Numai că nu știu prea bine cum să procedez. Cred că cel mai bine ar fi să enunț, sub formă de axiomă, propoziția următoare : Prin orice punct nesituat pe o dreaptă trece o dreaptă și numai una singură care nu întîlnește dreapta dată. Ar trebui să arăt, într-o notă, că încă nu s-a reușit să se găsească demonstrația acestei propoziții și că de aceea trebuie considerată ca o axiomă pînă ce se va demonstra sau se va dovedi falsitatea ei". Peste două luni, Gauss i-a răspuns astfel : „Sînt foarte fericit că ai curajul să recunoști eventualitatea că teoria noastră a paralelelor și, ca urmare,

întreaga noastră geometrie, ar putea fi falsă. Dar viespile al căror cuib îl distrugi, te vor ataca".

Nu mult după ce Gerling a primit acest răspuns, i-a trimis lui Gauss o notă din partea unui geometru diletant, Ferdinand K. Schweikart (1780 — 1857), fost profesor de drept la Harkov, care publicase în 1807 o broșură cuprinzînd o demonstrație al postulatului al V-lea. Recunoscînd el însuși că demonstrația pe care o imaginase era falsă, a reluat problema sub altă formă și astfel a ajuns la concepția geometriilor neeuclidiene. În nota adresată lui Gauss, Schweikart scria: „Există două geometrii, geometria în sensul restrîns al cuvîntului, adică euclidiană, și geometria astrală. În aceasta, triunghiurile prezintă particularitatea că suma celor trei unghiuri nu este egală cu două unghiuri drepte. Odată această ipoteză admisă, se poate demonstra în mod riguros: a) că suma celor trei unghiuri ale unui triunghi este mai mică decît două unghiuri drepte, b) că această sumă este cu atît mai mică cu cît aria triunghiului este mai mare, c) că înălțimea unui triunghi dreptunghic isoscel, ale cărui laturi cresc în mod constant, nu poate depăși un anumit segment, pe care eu îl consider constant. De asemenea, pătratele prezintă forma din figura alăturată (fig. 9). Dacă, pentru noi, constanta este egală cu raza pămîntului (în care caz, orice dreaptă care unește în spațiu o stea fixă și o alta la distanță de 90° va fi tangentă la globul terestru), ea este infinit de mare în raport cu lungimile ce se întîlnesc în viața curentă. Geometria euclidiană nu-i valabilă decît dacă constanta este infinit de mare".

Răspunsul pe care Gauss l-a adresat profesorului Gerling, și care începe prin afirmația: „Nota prof. Schweikart mi-a făcut o mare plăcere și vă rog să-i transmiteți toate complimentele mele pentru ea, îmi face impresia că am scris-o eu însumi", se continuă prin cîteva propoziții din geometria neeuclidiană stabilite de Gauss. Cu toate că răspunsul lui Gauss l-a încurajat pe Schweikart, el nu și-a mai publicat rezultatele pe care le-a stabilit în *geometria astrală*. Însă în scrisorile pe care le trimitea nepotului său F. A. Taurinus (1794 — 1874), ce studia pe atunci dreptul la Köln, i-a povestit despre preocupările lui în legătură cu postulatul și despre răspunsul primit de la Gauss. Așa că, peste cîțiva ani, atunci cînd și Taurinus a fost cuprins

de aceeași patimă ca și unchiul său, a căutat o demonstrație a postulatului al V-lea, folosind tot metoda reducerii la absurd, adică presupunînd că suma unghiurilor dintr-un triunghi este mai mică decît două unghiuri drepte. Rezul-

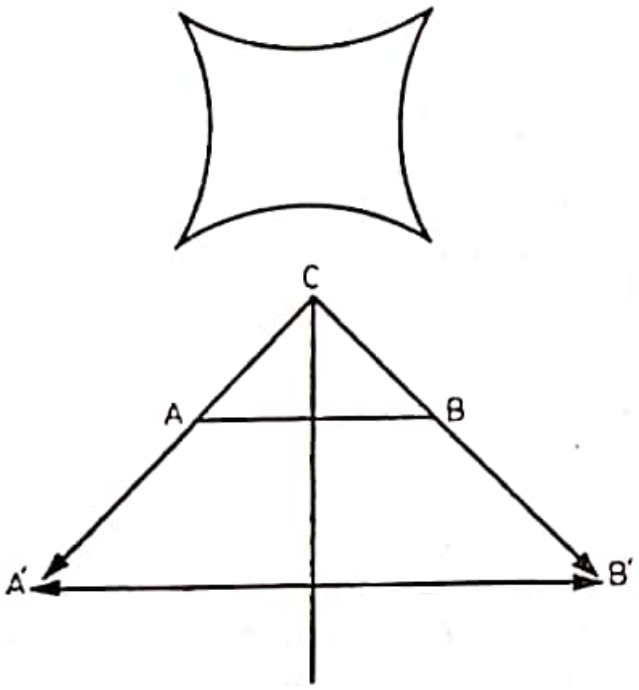


Fig. 9

tatele la care a ajuns, neconțrazicîndu-se între ele, le-a trimis lui Gauss.

Scrisoarea lui Taurinus s-a pierdut; a rămas însă răspunsul lui Gauss, din noiembrie 1824, adresat tînărului jurist și matematician Taurinus. În scrisoare, Gauss expune ideile esențiale ale unei geometrii pe care el o numește, pentru prima oară, *geometrie neeuclidiană*: „Ipoteza că suma unghiurilor dintr-un triunghi este mai mică decît 180° conduce la o geometrie cu totul diferită de a noastră (euclidiană); este perfect logică și eu am dezvoltat-o pentru mine într-un mod cu totul satisfăcător. Această geometrie îmi permite să rezolv orice problemă, cu excepția definiției unei anumite constante, a cărei valoare este imposibil să o stabilești apriori. Cu cît valoarea pe care i-o atribuim este mai mare, cu atît ne apropiem mai mult de geometria euclidiană și pentru o valoare infinit de mare a acestei constante, cele două sisteme coincid. Propozițiile acestei geometrii apar parțial paradoxale, chiar absurde, unuia care nu-i obișnuit. Dar dacă judeci calm și riguros, observi că

ele nu cuprind nimic imposibil. De pildă, poți face cele trei unghiuri ale unui triunghi oricît de mici vrei, cu condiția de a lua laturile suficient de mari ; cît despre aria triunghiului, ea nu poate depăși și nici atinge o anumită limită, oricare ar fi laturile lui. Toate încercările mele ca să găsesc o contradicție în această geometrie neeuclidiană au eșuat și singurul lucru față de care se răzvrătește rațiunea noastră este faptul că în spațiu, dacă acest sistem este just, ar trebui să existe o anumită mărime liniară determinată prin ea însăși. Dar îmi pare că... noi nu știm decît puține lucruri, mai bine zis, nimic, despre spațiu ; nu trebuie să confundăm ceea ce nu ni se pare natural cu ceea ce este absolut imposibil. Dacă geometria neeuclidiană ar fi adevărată și dacă constanta menționată mai sus s-ar găsi într-un anumit raport cu mărimi susceptibile de a fi măsurate în cer sau pe Pămînt, atunci ea ar putea fi determinată aposteriori. În glumă, îmi exprim uneori dorința ca geometria euclidiană să nu fie corectă, ca să dispunem astfel, apriori, de o măsură absolută pentru lungimi... Fiind vorba de o persoană care mi-a dovedit că posedă un profund spirit matematic, nu cred că va interpreta cele ce i-am expus în sens greșit, dar, pentru orice eventualitate, considerați acestea ca o comunicare particulară, care nu trebuie să fie nicidecum publicată".

După cum se poate constata, scrisoarea lui Gauss este extrem de cordială, ca și cum ar fi scrisă unui vechi prieten. Numai sfîrșitul parcă pune în gardă.

Fericit de răspunsul primit, plin de încredere și îndemn, Taurinus a continuat cercetările sale și în 1825 le-a publicat într-o broșură intitulată *Teoria paralelelor*, apoi le-a reeditat, revăzute, în anul următor, sub titlul *Geometria prima elementa*, în prefața căreia arată că ar fi de dorit ca și Gauss să-și publice rezultatele sale asupra principiilor geometriei. Atît ! Atît însă a fost de ajuns ca să-l supere pe Gauss așa de tare încît să rupă orice legătură cu Taurinus. Nu s-a gîndit să-l laude sau să-și spună părerea despre cărțile sale, dar nici nu a mai vrut să știe ceva despre el ! A considerat că Taurinus nu a respectat voința lui de a nu divulga nimic din cele ce i-a comunicat și că, prin aceasta, el nu mai există ca om ! Totuși Taurinus nu divulgase nimic din cele ce i-a comunicat Gauss, iar faptul că a cerut ca

acesta să-şi publice principiile sale nu i-a părut lui Taurinus că ar putea fi o vină, deoarece era bine ştiut de toţi că pe Gauss îl preocupau aceste probleme! Faptul acesta l-a îndurerat în aşa măsură pe Taurinus că a făcut un şoc nervos şi într-un acces de desperare şi-a ars cărţile ce le avea la el şi toate manuscrisele.

János Bolyai nu avea de unde să ştie că nu fusese el primul care a suferit din cauza unei anumite atitudini bizare a lui Gauss faţă de *Geometriile neeuclidiene*, că primul fusese, cu 6 ani înainte, un alt tînăr, cu numele Franz Adolph Taurinus! Şi cine ar putea spune dacă Gauss nu s-a gîndit să-şi justifice atitudinea pe care a avut-o faţă de Taurinus, atunci cînd în scrisoarea pe care a trimis-o prietenului său Bessel, în ianuarie 1829, îi spunea: „E foarte probabil că nu voi putea da prea curînd o formă definitivă cercetărilor mele referitoare la principiile geometriei, aşa fel ca să fie publicate. S-ar putea chiar ca nici să nu le public, căci mă tem de urletele boeţienilor pe care le-ar provoca părerile mele“ (62). Aceeaşi idee, exprimată şi prin imaginea viespilor ce apărea în scrisoarea din 1818 către Gerling, şi în interdicţia cu care termina scrisoarea către Taurinus! Şi chiar dacă nu putem să-i atribuim lui Gauss un prea mare exces de generozitate sau măcar de indulgenţă faţă de Taurinus, putem în schimb să observăm o atitudine fermă legată de problema geometriilor neeuclidiene. Iar, din cele ce am aflat pînă acum, avem convingerea că, oricît de dureroasă a fost pentru János Bolyai vestea că „întregul conţinut al lucrării, drumul pe care l-a ales şi rezultatele la care a ajuns coincid aproape pe de-a-ntregul cu meditaţiile sale proprii, corespundea întru totul adevărului! Nici faţă de Bolyai, Gauss nu a căutat să se poarte generos. El nu amesteca sentimentele cu rezultatele problemelor ce le cerceta. L-a considerat „un geniu de prima mărime“, dar i-a distrus, poate cu bună ştiinţă, bucuria ce ar fi putut să i-o ofere neamintindu-i nimic despre descoperirile sale. Din cauza acestei trăsături aspre a caracterului său, Gauss a avut faţă de mai mulţi matematicieni atitudini puţin prietenoase, deşi, privind lucrurile din punctul lui de vedere, nu i se putea imputa nimic (63). Nimic, în afară de atitudinea aceea bizară care se manifesta, pe de o parte, prin interzicerea altora de a vorbi despre descoperirile lui şi,

pe de alta, de a-și afirma, în toate scrisorile, dreptul la prioritate în acestea și în multe alte descoperiri (64).

Printre notele rămase de la János Bolyai, s-au găsit și aceste însemnări, legate de atitudinea lui Gauss față de problema geometriilor neeuclidiene: „După părerea mea și, cred, a oricărei persoane imparțiale, toate argumentele și motivele invocate de Gauss ca să-și îndreptățească refuzul lui intransigent de a se publica în timpul vieții lui ceva din propriile lucrări despre această problemă, nu sînt solide. În adevăr, în știință, ca și în viața de toate zilele, este foarte important să se facă lumină asupra lucrurilor universal utile, mai ales cînd ele nu sînt pe deplin clare, de a deștepta prin toate mijloacele conștiința obscură sau adormită asupra adevărului și a dreptății; aceasta trebuie întărită și dezvoltată. Din păcate, puțini sînt aceia care au spiritul deschis către matematici. Invocînd acest pretext, ca să fie consecvent cu el însuși, Gauss ar fi putut foarte bine să păstreze pentru el o parte considerabilă dintre excelentele lui lucrări. Faptul că, din nenorocire, există încă printre matematicieni, și chiar printre cei ce sînt celebri, multe persoane superficiale, nu poate justifica pe acela de a se continua și în viitor să nu se comunice decît rezultate superficiale și mediocre lăsînd știința în letargie, în starea în care ne-a fost transmisă. O asemenea atitudine ar fi contra naturii și complet absurdă. Ești neplăcut surprins de faptul că în loc să recunoască, deschis și cinstit, marea valoare a *Appendix*-ului și a întregului *Tentamen*, în loc să-și exprime bucuria și simpatia și să caute o cale către o folosire utilă a lor, Gauss se străduiește să aleagă căi ocolite, se grăbește să pronunțe urări pioase și să-și manifeste părerile de rău față de lipsa de instruire a oamenilor. Evident că nu în aceasta stă sensul vieții și meritul ei real".

János Bolyai avea dreptate, dacă nu ne gîndim la Gauss-omul, ci la Gauss-matematicianul. Ca om, viața lui Gauss a fost într-un fel tot așa de lovită de nefericiri ca și a lui János Bolyai, a lui Farkas Bolyai și a multor alții. Într-o scrisoare pe care o trimitea în 1804 prietenului său F. W. Bolyai, îl anunța, plin de fericire, că-i îndrăgostit și că se va căsători în curînd. În 1806 i se naște primul fiu, în care i se părea că vede semnele unui mare matematician. I-a dat numele de Josef, după numele lui Giuseppe Piazzi, des-

coperitorul micii planete Ceres, căreia Gauss îi determinase în 1802 orbita printr-o metodă ce a stîrnit admirația tuturor matematicienilor. Această lucrare a trezit și interesul lui Gauss pentru astronomie, astfel că a primit, din 1804, să devină directorul Observatorului astronomic din Göttingen ce avea să se construiască atunci, după indicațiile lui. În 1808, ultima scrisoare ce o mai primea Bolyai de la Gauss era scrisă de un om ce părea să-și fi găsit rostul : „fericite curg zilele în mersul monoton al vieții casnice... cînd băiatul a învățat vreo două cuvinte noi, acestea îmi par tot așa de importante ca și cînd s-ar fi descoperit o nouă stea sau am descoperit eu un nou adevăr". Dar, din 1809 scrisorile capătă alt ton. În 13 octombrie, un nou prieten va citi aceste rînduri : „Dragă Olbers, m-ai invitat, cu atîta dragoste, să te vizitez cînd se va însănătoși soția mea. Acum ea e bine. Aseară la ora 8 i-am închis ochii de înger în care cinci ani am găsit un cer. Cerul să-mi dea putere să suport această lovitură... viața, care nu mai are pentru mine alt scop decît grija acestor trei copii minori ai mei". Peste doi ani, prietenul Olbers va afla din nou o veste tristă : „Iarna aceasta a fost cea mai nenorocită din viața mea. Cel mai strașnic m-a durut pierderea lui Luis. Fără să fi fost cel puțin bolnav de mai înainte, s-a prăpădit după 8 ore de crampe, care i-au venit dintr-o dată. Sărmanul, mă privea întotdeauna așa de înțelegător, zîmbind liniștit cu ochii lui albaștri, mari și frumoși și eu îmi făceam dulci speranțe că el va fi moștenitorul meu, în preocupările serioase, științifice. Planuri smintite, timpuri dispărute în nimic. Dar și ceilalți doi copii ai mei mi-au adus iarna aceasta multă, multă supărare, nu atît pentru prezent cît pentru viitor". Apoi s-a recăsătorit și părea din nou fericit. Un nou fiu, avea „o privire serioasă, concentrată de viitor matematician". Peste ani, în scrisoarea din 1832, Bolyai va afla următoarele despre prietenul său din tinerețe : „Am pierdut pe a doua mea soție, de care am fost legat 21 de ani. Cea mai mare parte a timpului acestuia ea a fost bolnavă și mai ales ultimii nouă ani a stat aproape tot timpul în pat. Cît de greu apasă o asemenea durere și cum apar alte dureri ca urmare a acesteia, nu trebuie să-ți spun ție, căci și tu le-ai avut de asemenea pe ale tale. Despre cei cinci copii ai mei, puține am de spus... Din a doua căsătorie am doi bă-

ieți și o fată. Despre cel mai mare, din păcate rău-crescut, prefer să nu vorbesc. Greu se va cicatriza rana pe care a adus-o fericirii mele...În fine, cu mine stă și mama mea, acum de 89 de ani, complet oarbă. Nu-i o fericire să fii bătrîn". Acesta era Gauss-omul, dar concomitent cu el trăia și Gauss-matematicianul. Cît erau de legați unul se celălalt se poate înțelege din aceea că pe una dintre filele manuscrise ale unei descoperiri matematice „geniale", s-au găsit adăugate cu creionul cuvintele : „Moartea mi-ar fi mai scumpă decît o asemenea viață".

Ca matematician, superioritatea lui Gauss a fost remarcată și recunoscută încă din tinerețe, de către cei mai renumiți matematicieni ai lumii. Se povestește că într-o zi cunoscutul explorator Alexandru Humboldt (1769—1859) l-a întrebat pe celebrul matematician P. S. Laplace ((1749—1827) : „care este cel mai mare matematician al Germaniei?" — la care Laplace a răspuns fără ezitare „Pfaff". — Ce părere aveți despre Gauss? a replicat Humboldt, care susținea atunci candidatura lui Gauss ca director al Observatorului din Göttingen. — „O" ! a răspuns Laplace, „Gauss este cel mai mare matematician din lume! Ca matematician, Gauss era tot așa de deosebit de ceilalți matematicieni, după cum ar fi un om ce privește o picătură de apă printr-un microscop față de un altul care o privește cu ochiul liber. Era de ajuns ca el să se concentreze asupra unei probleme, ca ea să se așeze automat sub placa microscopului din mintea lui și astfel să i se deslușească în toată vastitatea și complexitatea ei. Singurul lucru ce-i rămînea de făcut era să-și găsească timp ca să-i dea forma scrisă, astfel ca să poată fi comunicată și semenilor săi. Desigur că la această operație făcea aluzie, în scrisoarea aceea faimoasă din 1832, către Bolyai : „Atîta vreme cît nu faci alta decît să te gîndești la probleme cu ajutorul direct al intuiției, nu trebuie nici numiri, nici semne, dar ele devin necesare cînd vrei să le lămurești și altor oameni".

În jurnalul lui intim, care nu a fost cunoscut decît la 43 de ani după moartea lui Gauss (65), se găsesc însemnate, numai pe 19 pagini, 146 dintre descoperirile lui sau rezultatele unor calcule importante, pe care le-a stabilit între 1796 și 1814. Ele atestă prioritatea lui, nu numai în problemele în care a intervenit personal, afirmînd această prio-

Medalia lui Gauss, emisă de George al V-lea, regele Hanovrei

ritate, dar în multe altele asupra cărora a preferat să tacă, tocmai ca să nu mai stîrnească și alte discuții. Totuși aceste discuții au existat. Gauss a fost acuzat de faptul că nu a primit cu bunăvoință descoperirile matematice ale matematicienilor tineri. Cine ar fi putut bănui că acele noi descoperiri, poate chiar într-o formă și mai completă, erau însemnate în caietul lui cu mulți ani mai înainte și așteptau doar să fie dezvoltate ? Însă fiindcă prea puțini cunoșteau frămîntările acestui suflet, admirat ca matematician dar nu și ca om, atitudinea lui părea bizară. Iar în privința aventurii geometriilor neeuclidiene, această atitudine bizară se va mai manifesta încă o dată cu apariția unui nou personaj.

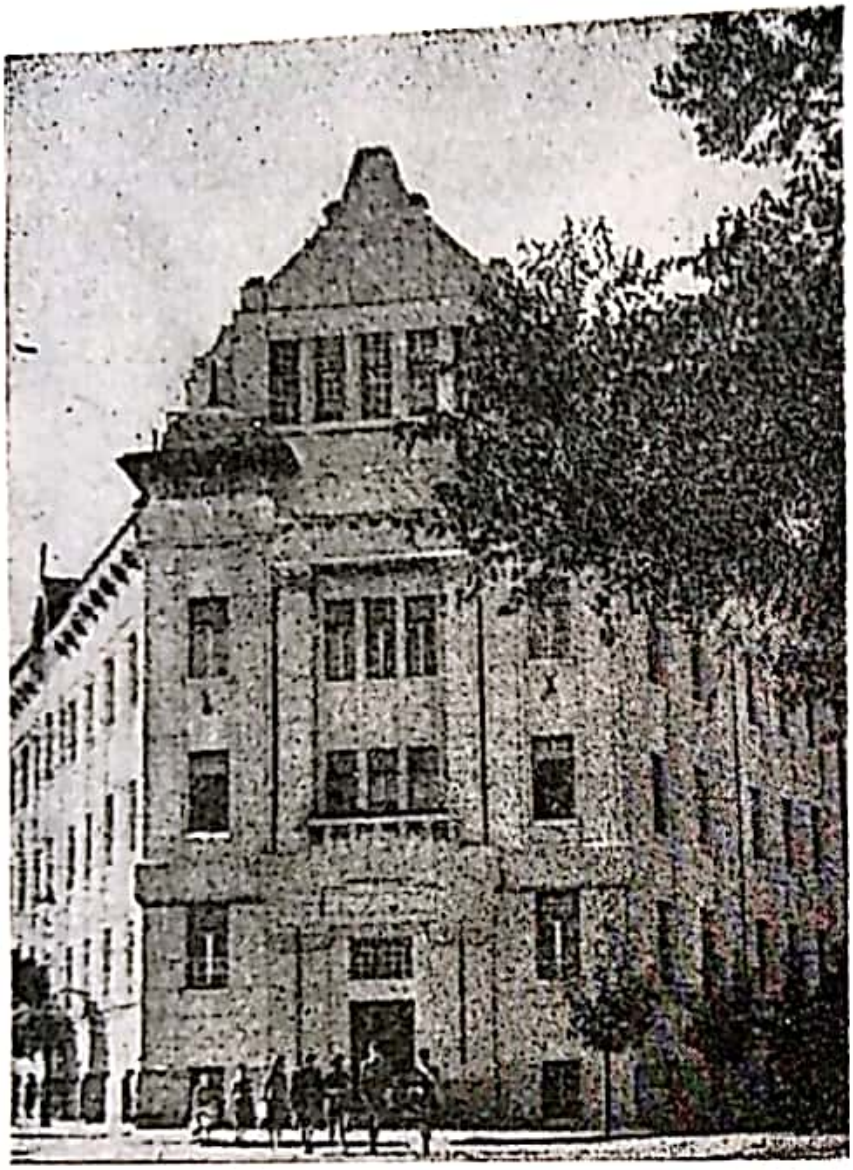
UN TRĂSNET DIN SENIN

„Oricît de-ntinsă-i marea, corăbiile-ades
se-nerucișează-n cale, sub zarea nesfîrșită."

Tiberiu Utan[1]

În iunie 1833, după ce a primit decizia de pensionare, János Bolyai a considerat că era firesc să se întoarcă acasă și să locuiască împreună cu tatăl său. Dar această hotărîre a însemnat o tragedie pentru cei din jurul lui și pentru el însuși. Soția a doua a lui Farkas Bolyai murise de trei luni și el rămăsese împreună cu fiul său, Gregor, în vîrstă de 7 ani, foarte ocupat cu cursurile de la colegiu, cu redactarea lucrărilor și a celui de-al doilea volum din *Tentamen*, avînd, în plus, să răspundă obligațiilor ce-i reveneau din faptul că fusese ales, de un an, membru corespondent al Academiei ungare la Secția matematică. Nu i-a trebuit mult lui János să înțeleagă că era un intrus în casa părintească, fiindcă toate locurile ce le considera legate de copilăria lui erau acum ocupate de un alt copil care-și afirma, cu o naivă, dar ucigătoare cruzime, dreptul de atotstăpînitor. Însăși figura lui plăpîndă, mai mică decît cea normală, cu privirea severă sau ironică în care-și ascundea suferința interioară, faima de duelist invincibil ce ajunsese în oraș înaintea lui, făcea ca toți să se îndepărteze de el. Toți, în afară de Rozalia von Orban, alături de care János Bolyai a simțit că ar putea afla liniștea și fericirea. De aceea, a hotărît să se căsătorească cu ea. Dar, fiind în cadrele armatei, deși pensionat, trebuia să ceară permisiunea, făcînd dovada că viitoarea soție are avere. Însă Rozalia era săracă și fiindcă nu avea

[1] Utan, Tiberiu (n. 1930), scriitor român.



Institutul pedagogic din Tîrgu Mureș

dota ce se cerea pentru aprobarea căsătoriei, János a cerut tatălui său să-i dea partea de moștenire ce i se cuvenea din averea mamei sale. Era singura bucurie pe care ar fi putut-o dărui un tată unui fiu năpăstuit, fără nici un sprijin sufletesc, dar acesta a refuzat să o facă. Nu a lipsit mult ca să se ajungă la judecată sau ca spadasinul să se repeadă asupra aceluia ce-l nedreptățea. S-a întîmplat însă ca să fie atunci în Tîrgu Mureș fratele tatălui său, Anton, ce locuia la Domald. Acesta i-a propus să vină cu el și să administreze o parte din moșia părintească. János, din fire mărinimos, a cedat și a plecat împreună cu Rozalia la Domald, unde a găsit liniștea după care tînjea. Între 1834—1835 a început să scrie o carte, pe care a intitulat-o *Știința spațiului*. Considera că trebuia să scrie o lucrare despre fundamentarea

riguroasă a geometriei, a celei vechi și a celei noi, discutînd principiile de bază pe care ea este construită. În *Introducere* a făcut istoricul teoriei paralelelor, apoi în primele trei capitole a adîncit noțiunile fundamentale de geometrie, s-a ocupat de unghiuri și poligoane, precum și de construcțiile geometrice. Al patrulea capitol, în care urma să trateze problema liniilor paralele, a rămas numai în note. Cauza acestei întreruperi pare să fie corespondența ce s-a stabilit, între 1835 și 1837, între el și tatăl lui, în legătură cu problema operațiilor cu numerele imaginare (66). Se pare că János pătrunsese mai adînc în miezul problemei : „Nu se poate să nu fi observat greșeala dumitale și să nu o înlocuiești cu observația mea dreaptă", îi scria el tatălui său, adăugînd : „Nici Soarele nu luminează mai clar decît cele afirmate de mine".

Numerele numite „imaginare" fuseseră descoperite în prima jumătate a veacului al XVI-lea de către matematicianul italian G. Cardano (1501—1576), atunci cînd a încercat să rezolve următoarea problemă : „Să se afle două numere astfel ca suma lor să fie egală cu 10 și produsul cu 30". El a găsit că soluția problemei constă din două numere de forma $5+\sqrt{-15}$ și $5-\sqrt{-15}$. Pentru el, asemenea numere erau *imposibile*, nu puteau exista, căci : „pătratul oricărui număr trebuie să fie neapărat pozitiv" și de aceea le-a numit *numere cu minus sofistical*. Reluînd problema, alt matematician italian din același secol, R. Bombelli (1530—1590 ?), dă numele de *numere imaginare* tuturor expresiilor de forma $\sqrt{-N}$, unde N este un număr oarecare pozitiv, ca să deosebească astfel aceste numere de *numerele pozitive și negative*, privite ca avînd o existență reală, mai ales după ce s-a introdus noțiunea de segment orientat. Timp de trei veacuri, aceste numere, numite impropriu *imaginare*, au rămas o enigmă și totodată un scandal deși ele apăreau în multe din problemele noi ale matematicii. În Algebra publicată de L. Euler (1707—1783) în 1777, găsim : „expresii ca $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ nu sînt nici nimic, nici mai mari ca nimic, nici mai mici ca nimic, ele sînt în mod necesar imaginare și imposibile". Euler este acela care a introdus și notația folosită azi $i = \sqrt{-1}$, „i" fiind inițiala cuvîntului imaginar, astfel ca, de pildă, în loc de $\sqrt{-4}$ să se înscrie 2i.

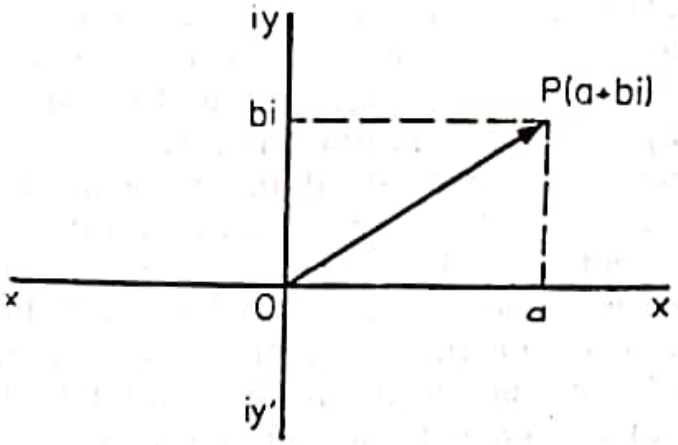
Leonhard Euler

Gauss a fost primul care a încercat să pătrundă mai adînc în natura numerelor de forma $(a + bi)$, unde a și b sînt numere reale. El a numit asemenea numere *numere complexe* și a arătat că ele pot fi considerate ca puncte ale unui plan raportat la două axe de coordonate, perpendiculare între ele, xx' și iyy' (fig. 10) astfel că toate punctele de pe axa xx' au ca abscise numere reale, iar acelea de pe axa iyy' au ca ordonate numere imaginare. De fapt, o asemenea interpretare a numerelor complexe fusese stabilită și de alții, mai înainte de Gauss, însă pe vremea aceea nu se știa aceasta. Dar numai o astfel de reprezentare nu era suficientă pentru a se putea preciza regulile de calcul cu aceste numere care, pînă atunci, se făceau luîndu-se ca model operațiile cu numerele naturale.

Într-una din scrisorile dintre cei doi Bolyai, tatăl îl anunța pe fiu că „Societatea științifică din Leipzig a pus la concurs, pentru premiul Iablonovschi, *Problema perfecționării teoriei geometrice a mărimilor imaginare*". Chemarea, formulată de cunoscutul profesor de matematici de la Universitatea din Leipzig, M.V. Drobisch, începea astfel: „După cum se știe, mărimile imaginare au azi aplicații nu numai în

analiză, ci și în geometria analitică. Gauss a arătat că aceste mărimi, cărora de obicei le este contestată orice realitate, mai puțin chiar decît aceea a numerelor negative, nu sînt lipsite de concretizare. Pe de altă parte, și alți geometri au stabilit că, atunci cînd apar mărimi imaginare în problemele de geometrie, acestea pot fi întotdeauna construite ..."

Fig. 10



Deși lucrarea trebuia trimisă în timp de o lună de la data la care fusese înștiințat concursul, la îndemnul tatălui său, János s-a hotărît să participe și el. De comun acord, au hotărît ca fiecare să lucreze independent și apoi să trimită împreună răspunsurile, fără ca vreunul dintre ei să citească lucrarea celuilalt. Totuși, cînd s-au întîlnit ca să trimită lucrările, Farkas a călcat înțelegerea și l-a rugat pe fiul său să-i citească lucrarea. Acesta a făcut-o, iar cînd a terminat de citit, și-a luat manuscrisul și a plecat fără să facă nici o apreciere asupra lucrării citite. Farkas Bolyai a crezut că János o considera pe a sa inferioară — avea, dealtfel, numai 8 pagini (67) — și că a retras-o din concurs. De fapt, János a luat-o ca să o expedieze el singur și nu alături de cealaltă. Farkas a mai așteptat o zi, crezînd că poate fiul său se va răzgîndi și întîlnindu-l l-a întrebat. Acesta a răspuns : „N-o mai trimit" și a plecat fără nici o explicație la Domald. Mare i-a fost însă surpriza cînd a văzut la poștă un plic pe adresa Societății din Leipzig. A înțeles că János trimisese lucrarea și relațiile dintre cei doi s-au înăsprit din nou.

În luna martie 1838 s-a dat rezultatul concursului, la care s-au prezentat trei lucrări. Nici una nu a fost acceptată. Pentru János Bolyai această veste a deschis rana provocată

odinioară de scrisoarea lui Gauss. Era conștient de valoarea lucrării sale, la care lucrase cu seriozitate și pasiune, și zile întregi nu a fost în stare să vorbească. Stătea în cameră, cîntînd la vioară, sau venea să-și privească copilul, Dyonis, ce se născuse în octombrie 1837.

Într-o seară, ca după o lungă boală, glasul i-a revenit și atunci i-a spus Rozaliei : „Nu-mi pare rău de premiu, ci după acea comoară neprețuită ce a încăput pe mîini nedemne de ea. Am crezut că matematicienii din Leipzig vor putea-o aprecia, dar m-am înșelat. Desigur că „Societatea" nu a putut-o judeca decît în limita posibilităților ei de înțelegere și, în acest caz, nu o pot învinui, și-a făcut datoria atît cît a fost în stare. Acum însă voi judeca eu această „Societate", care nu se pricepe să privească o lucrare în mod critic. Au dat o sentință ucigătoare asupra întregii lucrări, spunînd că este nefolositoare și neinteligibilă. Această sentință va rămîne ca o pată rușinoasă, pe care vremea o va accentua în loc să o șteargă !"

János Bolyai avea dreptate. El a fost cu adevărat un om fără noroc. Memoriul său despre numerele imaginare depășea nivelul de înțelegere al matematicienilor din Societatea din Leipzig. În el se aflau începuturile teoriei logaritmilor de argument complex, aplicațiile numerelor imaginare în geometria neeuclidiană (absolută) și, mai ales, întreaga teorie a cuaternionilor care a adus, peste 17 ani, faimă matematicianului englez W. R. Hamilton (1805—1865), cu trei ani mai tînăr decît el. Cîtă deosebire între soarta acestor două talente mari, care au trăit în același timp, unul în Tîrgu Mureș și celălalt la Dublin, fără să se cunoască măcar !

Ca și Bolyai, Hamilton a fost un copil precoce. La trei ani citea și cunoștea bine aritmetica. La cinci ani cunoștea limba latină, greacă și ebraică. Avînd un unchi care era lingvist, William învățase, pînă la 13 ani, 13 limbi, printre care sanscrita și persana. Tot la această vîrstă a început să învețe și matematicile și la 17 ani citea pe Newton, pe Lagrange și putea calcula eclipsele. Pregătindu-și examenele de intrare la Trinity College din Dublin, a făcut o descoperire în optica teoretică, prin care a cîștigat faima de matematician precoce și a devenit repede o celebritate. Succesele ce le-a avut la studii, au făcut să fie numit, la 22 de ani, profesor de astronomie în locul rămas vacant prin mutarea

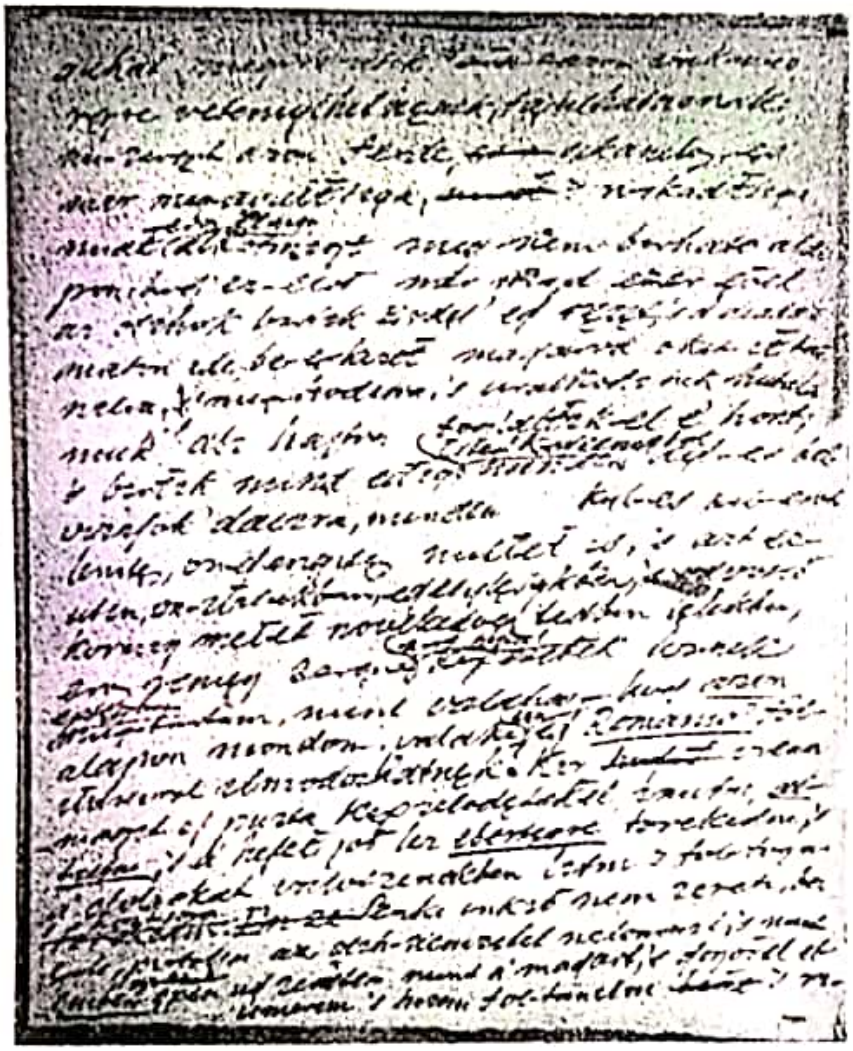
profesorului respectiv în altă localitate. Descoperirea cuaternionilor i-a adus titlul de Primul membru străin al Academiei naţionale de ştiinţe din Statele Unite ale Americii. În cartea sa, devenită celebră, *Lecţii despre cuaternioni*, apărută la Dublin în 1853, sînt expuse ideile care au pus bazele teoretice ale calculului cu numerele complexe şi au generalizat această noţiune, în sensul că dacă numărul complex $(a + bi)$ putea fi considerat ca o pereche ordonată de numere reale (a, b), cuaternionul apărea ca un număr hipercomplex, definit printr-o pereche de numere complexe, aşa cum arătase şi János Bolyai în memoriul propus la concurs !

Dar rezultatul concursului din Leipzig l-a mîhnit şi pe Farkas Bolyai. Se simţea umilit mai ales faţă de fratele său şi de János. Nu uitase comportarea sa dinaintea concursului şi, la cîteva zile după ce a aflat rezultatul, a scris o scrisoare fratelui său, arătînd că fiul său l-a minţit în modul cel mai urît, spunîndu-i că nu trimite lucrarea cînd în realitate a trimis-o. Despre rezultatul concursului scria : „Lucrarea lui era proastă, aşa că, deşi a trimis-o la termen, nu a putut cîştiga premiul, iar a mea a fost trimisă cu o zi mai tîrziu decît termenul prescris". Probabil că această simplă descărcare a nervilor prin scrisoare nu a potolit nemulţumirea lui Farkas Bolyai şi, de aceea, a trecut în administrarea fratelui său şi partea domeniului pe care o îngrijea pînă atunci János. Astfel el ar fi putut fi alungat din acel loc liniştit, leagăn al copilăriei lui fericite, dacă Anton nu ar fi înţeles tragedia şi nu i-ar fi oferit mai departe ospitalitatea.

Timp de aproape cinci ani tatăl şi feciorul nu au mai comunicat. Dar în decembrie 1842, Farkas reia legăturile, felicitîndu-şi feciorul de ziua naşterii : „Doresc corpului tău sănătate, iar sufletului acel foc pentru ştiinţă care să mă facă să mai trăiesc un nou *Appendix*, asta-i ceea ce-ţi doresc ! " Şi lui János îi era dor de tatăl său pe care-l iertase din nou şi, ca să-i dăruiască ceva care ştia că-i va face plăcere, i-a trimis demonstraţia uneia dintre teoremele ce le descoperise în ultima vreme. Darul l-a bucurat atît de mult încît îi scrie din nou, invitîndu-l în primăvara anului 1843 la el. János s-a dus, dar relaţiile dintre ei nu puteau fi menţinute decît numai pe teren ştiinţific. S-au certat din nou şi peste şase săptămîni feciorul s-a întors acasă tulburat. Dar cînd trecuse destulă vreme ca să uite şi să tînjească iar după

tatăl său, în anul 1845 a murit unchiul Anton. Cu această ocazie János a găsit scrisoarea pe care Farkas a scris-o în 1838, după concursul din Leipzig, rugîndu-şi fratele să o ardă. Citirea ei l-a îndurerat peste măsură, a luat scrisoarea, a pus-o într-un plic şi i-a trimis-o tatălui său : „Îţi trimit această scrisoare a dumitale către unchiul Anton. Sînt jignit şi mîhnit că în această scrisoare, ca şi în multe altele, ai căutat să-mi distrugi onoarea ... Ţi-o trimit intenţionat ca să înceteze odată această lipsă de bun simţ. Află că nimic din cele ce ai scris nu-i adevărat, dar, chiar dacă ar fi aşa, nu înţeleg cum de te poţi bucura de asemenea fapte şi las la aprecierea dumitale dacă merita să le scrii fratelui dumitale drag ! Pentru mine însă urmează cea mai grea acuzare, aceea că *te-am mințit*. Cuvîntul nu-i demn de dumneata. În realitate nu te-am mințit, fiindcă atunci cînd m-ai întrebat dacă voi mai trimite lucrarea, ea era gata trimisă şi de aceea ţi-am răspuns englezeşte : „Acum nu o mai trimit".

După această scrisoare, Farkas Bolyai, care s-a mîniat şi mai mult, a luat cea mai necugetată hotărîre. Fiindcă Anton îi lăsase lui ca moştenire partea sa din Domald, Farkas Bolyai a arendat întreaga moşie unui străin şi astfel János a fost izgonit definitiv de acolo. În 1846, el s-a mutat cu familia sa în Tîrgu Mureş, într-o căsuţă ce şi-a construit-o el singur. Îl aştepta o viaţă foarte grea, avînd de întreţinut, din pensia lui, soţia şi trei copii. Dionys avea 9 ani, urma la o şcoală din Sibiu, dar în 1847, nemaiavînd cu ce-l întreţine, a trebuit să-l retragă. Din nou au început discuţiile pentru moştenire şi, într-un tîrziu, în martie 1848, tatăl a admis să-i dea partea de moştenire ce i se cuvenea din Domald. Avea astfel, în sfîrşit, cauţiunea necesară ca să obţină, după atîţia ani, aprobarea pentru căsătoria lui cu Rozalia von Orban. A cerut-o, ca să repare nedreptatea ce i se făcuse odinioară. Însă, în 1848, autorităţile militare, preocupate cu problemele legate de revoluţia ce se dezlănţuise atunci, nu a mai dat curs cererii de căsătorie (68). Dar asemenea supărări aveau să fie uitate pentru totdeauna în ziua de 17 octombrie 1848 cînd János Bolyai a primit prin poştă, trimisă de tatăl său fără nici un comentariu, cartea publicată în 1840 de Nicolaus Lobatschefsky la Berlin, cu titlul : *Geometrische Untersuchungen zur Theorie des Parallellinien.*

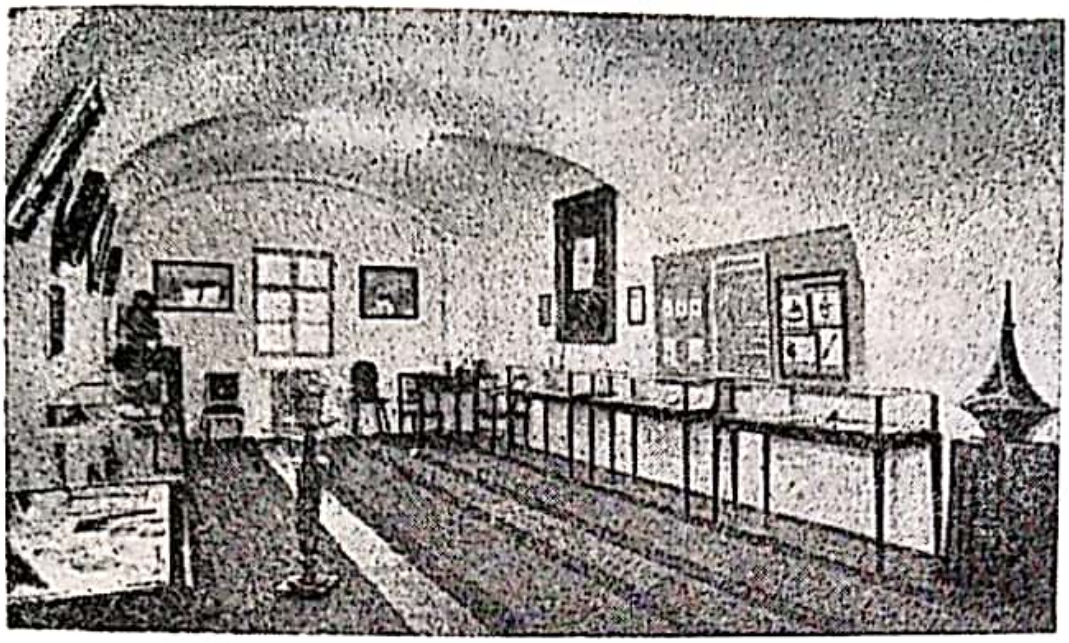


Fragment dintr-un manuscris al lui János Bolyai:
....Nimeni nu iubește, nu prețuiește, nu susține mai mult ca mine națiunea română și, ca oameni, pe români îi iubesc la fel ca pe maghiari"...

A fost ca un trăsnet din senin, și el nu și-a mai dat seama de nimic din cele ce se petreceau în jurul lui. Fel de fel de presupuneri, care mai de care mai absurde, l-au torturat întruna. Cu cine să discute ? Era „singur ca un mormînt", scrisese el cîndva. Numai hîrtia și vioara puteau să-i fie martorii durerii și nedumeririi. Ani întregi nu a mai știut ce înseamnă odihna. Lucra neîntrerupt, zile și nopți la rînd, scria pînă îi amorțeau degetele pe condeiele din pană de gîscă pe care și le tăia singur cu migală și răbdare. Însemnările nu erau destinate publicării, de aceea le scria în ungurește, așa cum îi treceau prin minte, referindu-se cînd la anumite

Muzeul Bolyai din Tîrgu Mureș

probleme de matematici, cînd la altele de natură intimă. Folosea uneori un alfabet, inventat de el și tatăl lui, cu gîndul de a crea o limbă universală. Mai întîi, a notat impresia pe care i-a făcut-o *Cercetările geometrice* ale lui Lobacevski: „Dacă în această lucrare, foarte remarcabilă, autorul urmează și alte căi, totuși esența și rezultatele operei sale coincid așa de mult cu *Appendixul* la *Tentamen*, publicat în 1832, încît nu poți să nu rămîi uimit. Dacă Gauss a rămas uimit de *Appendix* și apoi de coincidența minunată a descoperirilor unui matematician rus și ale unuia maghiar, eu nu sînt mai puțin mirat. Desigur că esența adevărului pur trebuie să fie în toată lumea aceeași, în Tîrgu Mureș sau Kamciatka, în Lună sau oriunde. Ceea ce descoperă o ființă gînditoare, poate fi descoperit și de către o alta, lucrul acesta nu este imposibil. Pe de altă parte, în cursul dezvoltării omenirii, rezultatele gîndirii, ca și produsele naturii au un anumit timp cînd apar și astfel, uneori, același obiect se studiază pe pămînt și pe mare și de aici rezultă idei înrudite, cum a fost, de exemplu, cazul *Calculului diferențial și integral*. În sfîrșit, nici acest obiect nu a fost așa de greu de ascuns. Totuși, dacă ne gîndim cît de puțini matematicieni cu o gîndire adîncă au ajuns la conștiința acestei lipse din geometrie și au căutat să o completeze ... dacă ne gîndim că un om atît de serios ca



În muzeul Bolyai din Tîrgu Mureș

Ettinghausen nu a fost în stare să înțeleagă *Appendix*-ul, atunci cu greu se poate admite, ca probabil, ca doi sau chiar trei oameni, care nu știu nimic unul despre altul, să epuizeze complet problema, aproape în același timp, cu toate că pe căi diferite. După aceste considerații, eu nu socotesc neverosimilă bănuiala, cu toate că o spun cu greu aici și nu mă gîndesc să o public, că Littrow, ca membru de onoare al Universității din Kazan (și în trecut profesor de matematici) să fi fost poate în corespondență cu Lobacevski și să-i fi trimis exemplarul din *Tentamen* pe care i l-a expediat tatăl meu din Viena. Iar Lobacevski, ca un om plin de talent, și-a dat seama de importanța acestei lucrări și a căutat să ajungă la rezultatele aflate acolo, pe altă cale. Dar și mai probabil că însuși Gauss, uriașul care și fără de această lucrare este stăpînul atîtor comori, să nu se fi putut împăca cu gîndul că altcineva i-ar lua-o înainte în această problemă, și cum nu mai putea preîntîmpina acest lucru, a prelucrat singur teoria și a dat-o la lumină sub numele de Lobacevski".

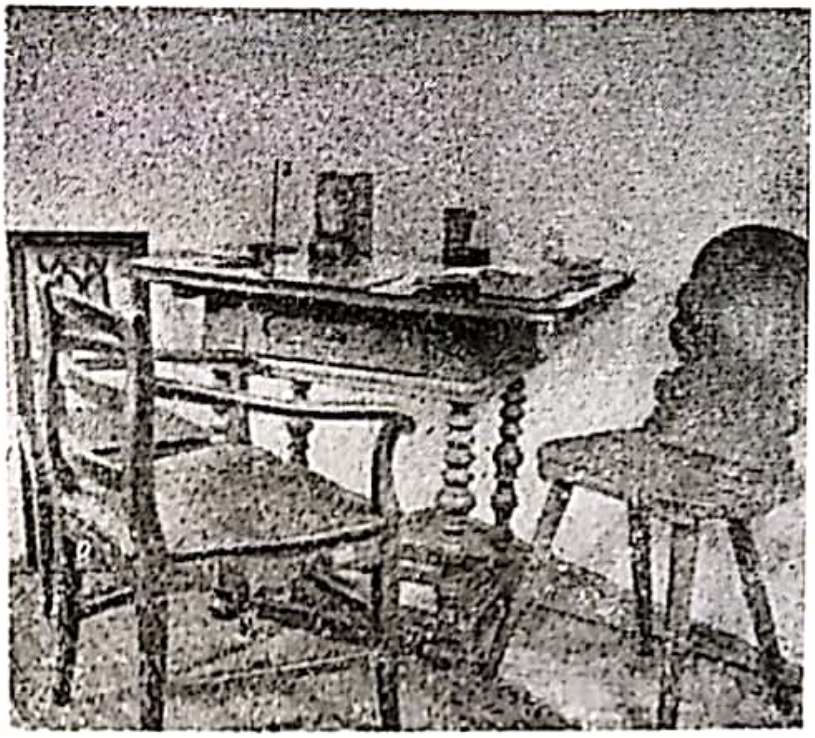
Gîndul la atitudinea lui Gauss față de el nu-l părăsea și nu-și putea opri pana să aștearnă cuvintele grele, care îi împovărau și mai tare sufletul. Îl persecuta și chestiunea priorității: „*Appendix*-ului îi aparține prioritatea, afară de cazul cînd Lobacevski ar fi tipărit această teorie în 1829. Dealtfel și eu am descoperit partea esențială a acestei științe

în 1823 și am trimis, în 1826, o primă redactare a ei, căpitanului Wolter, profesorul meu de la Academia tehnică militară din Viena." A cercetat lucrarea lui Lobacevski rînd cu rînd, cu o mare atenție : „Denumirea de *geometrie imaginară* este tot atît de puțin potrivită și rațională ca și denumirea de *mărimi imaginare*, deoarece ambele geometrii sînt la fel de accesibile imaginației și totdeauna va rămîne nerezolvată problema care dintre ele este cea reală."

Bolyai a fost unul dintre primii matematicieni care a înțeles că numerele complexe nu se opun *numerelor reale* în calitate de *imaginare* și a încercat să explice aceasta în lucrarea trimisă la Leipzig. Azi, denumirea de *geometrie imaginară* a și fost părăsită. Se spune fie *geometria Bolyai-Lobacevski*, fie *geometria necuclidiană*, fie *geometria hiperbolică*, după cum și denumirea de *număr imaginar* este înlocuită, tot mai mult, cu aceea de *număr complex*. Dar János Bolyai a știut să remarce și toate părțile frumoase ale lucrării și să le recunoască cu admirație : „Atît în *Appendix*, în care paragraful 29 reprezintă, fără îndoială, unul dintre punctele esențiale, cît și la Lobacevski, aici începe partea cea mai originală și totodată cea mai importantă abatere a lui de la *Appendix*. Și trebuie să recunosc că lucrarea lui, începînd în special de la acest loc, reflectă un uriaș geniu creator, iar calea pe care o urmează începînd de aici și rezultatul la care ajunge îl ridică fără îndoială, dintr-o dată, în rîndul geometrilor de prim rang. Ideea lui fundamentală este minunată. Cu un tact foarte fin, el caută la locul potrivit și găsește adevărul ascuns într-un colț. Chiar dacă în unele locuri se bazează pe considerații încurcate și rămîne în urma acelei perfecțiuni care este de dorit și pe care eu am atins-o, totuși lucrarea lui trebuie considerată ca o operă de maestru. El face parte dintre acei puțini care au văzut importanța acestui obiect, pînă acum complet ascuns. Îi face o mare cinste faptul că a căutat să aducă acest obiect la lumina zilei și a îmbogățit domeniul lui cu idei noi : clasificarea multilaterală a lucrurilor foarte adînc ascunse este foarte folositoare..."

Doi ani și jumătate a prelucrat Bolyai *Notele critice cu privire la cercetările geometrice ale lui Lobacevski*. Ele prezintă și azi interes, fiindcă oglindesc ideile asupra multora dintre problemele ridicate de fundamentele geometriei.

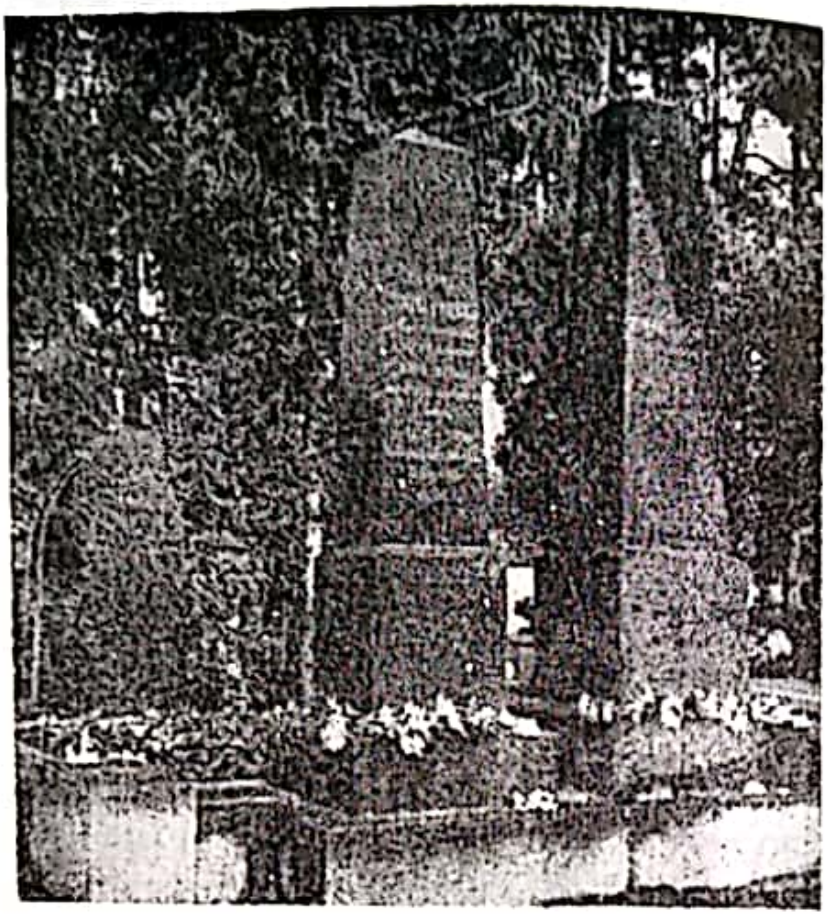
Masa de lucru



Printre altele, este discutată și problema necontradicției, considerațiile făcute de Lobacevski fiind departe de a-l mulțumi. János Bolyai afirmă chiar că a găsit o demonstrație precisă în legătură cu necontradicția geometriei neeuclidiene, însă această demonstrație nu s-a găsit. La începutul anului 1851, el se grăbea să termine aceste note, ca să le ofere în dar tatălui său, de ziua lui de naștere, 9 februarie, cînd împlinea 76 de ani. Se poate spune că, în acea zi, cei doi Bolyai au fost primii matematicieni din Europa, și poate singurii, care aduceau, exceptîndu-l pe Gauss, un omagiu de admirație operei lui Lobacevski, recunoscîndu-i importanța.

Dar cum ajunsese Farkas Bolyai în posesia *Cercetărilor geometrice ?* Dintr-o pur și simplă întîmplare. În 1843, profesorul Fr. Mentovici din Aiud, care studiase matematicile la Viena și Berlin, a făcut o vizită lui Gauss. Peste un an, Mentovici a povestit despre întîlnirea lui cu Gauss într-un ziar local, arătînd că marele matematician i-a vorbit despre Wolfgang Bolyai, spunînd : „Aș fi foarte bucuros să mă mai întîlnesc cu el căci atunci cînd îmbătrînim, iar bunii noștri prieteni și cunoscuți mor treptat, ne atîrnăm cu sufletul de cei dragi care au mai rămas. " Mentovici mai adăuga faptul că a văzut opera lui Bolyai în biblioteca mică

În cimitirul
din Tîrgu Mureș



din camera sa, alături de o lucrare a lui Lobacevski pe care Gauss i-a arătat-o, spunîndu-i că „ea conține aceleași idei ca și acelea ale lui János Bolyai. Îi transmite salutări lui Wolfgang Bolyai și îl ruga să-i scrie". Citind această notiță în ziar, Farkas-Wolfgang Bolyai a scris la 10 septembrie 1844 despre ea fiului său, accentuînd faptul că Gauss posedă o lucrare a unui matematician necunoscut care se aseamănă cu a sa. Scrisoarea lui Farkas Bolyai a rămas însă fără nici un răspuns. Se vede că fiul său era încă îndurerat de atitudinea lui Gauss ca să-l mai intereseze o asemenea poveste, pe care o considera, desigur, doar o scornire de-a lui, ca să-i facă inimă rea!

Nu se știe însă ce a intervenit că, după patru ani, adică în ianuarie 1848, Farkas Bolyai i-a scris lui Gauss, cerînd informații despre cartea lui Lobacevski. Gauss i-a răspuns în aprilie 1848 (69), arătîndu-i că „lucrarea geometrului rus se află, în cea mai mare parte, în *Analele* rusești ale Universității din Kazan. Presupun însă că ai putea obține mai ușor mica și excelenta lucrare: *Geometrische Untersuchungen zur*

Theorie der Parallellinien von Nicolaus Lobatchefski, Berlin, 1840". Gauss nu adăuga nici un cuvînt mai mult despre această lucrare, nici despre entuziasmul care l-a făcut să învețe limba rusă, ca să poată citi aceste memorii în original (70). Nu-i spunea prietenului său nici că, după ce a primit lucrarea lui Lobacevski l-a recomandat, în 1842, Societății de științe din Göttingen ca membru corespondent „fiind unul dintre matematicienii cei mai de seamă din Rusia", că alegerea s-a făcut tot în 1842 și că el însuși i-a iscălit, diploma de membru al Societății, nici că Lobacevski i-a scris, mulțumindu-i pentru această cinste: „Aș dori ca toate lucrările mele să fie la înălțimea excelentelor lucrări ale Societății; eu nu voi precupeți nici un efort în această privință". Nu și-a amintit Gauss nici de cele ce a spus într-o altă scrisoare trimisă numai cu doi ani mai înainte, în 28

noiembrie 1840, vechiului său prieten Schumacher: „Am avut de curînd ocazia să revăd lucrarea lui Lobacevski *Cercetări geometrice*. Ea cuprinde bazele acelei geometrii și consecințele care ar trebui să aibă loc dacă geometria lui Euclid nu ar fi adevărată. Schweikart numește o atare geometrie, *geometrie astrală*. Lobacevski o numește *geometrie imaginară*. Știi că eu am avut asemenea convingeri de acum 54 de ani (din 1792). Dealtfel, pentru mine n-am găsit nici un material nou în opera lui Lobacevski, doar dezvoltarea lui este făcută în alt mod decît l-am conceput eu, și anume de către Lobacevski într-o formă magistrală și într-un spirit cu adevărat geometric.“ Își amintea, în această scrisoare către Schumacher, de convingerile lui de acum 54 de ani, dar uitase cu totul de o alta, mai recentă, numai de acum 14 ani, aceea că fiul prietenului său era și el tot „un geniu de prima mărime“ și că l-ar fi putut pune alături de Lobacevski, așa cum va face istoria mai tîrziu. Abia după ce a primit răspunsul lui Gauss, Farkas Bolyai a înțeles că ideile fiului său încolțiseră și altundeva, a comandat cartea și astfel ea s-a înfățișat lui János Bolyai, ca un trăsnet din senin!

În legenda argonauților se spune că Iason, însoțit de cîntărețul Orfeu și de cîțiva prieteni, a pornit pe corabia Argo, ce fusese construită de Argos cu ajutorul zeiței Atena, ca să aducă din Colchida lîna de aur, prețul cerut pentru dobîndirea domniei ce-i fusese furată tatălui său. Dar cînd, după multe peripeții primejdioase, el a reușit să aducă lîna de aur, nu a obținut răsplata cuvenită și bucuria i s-a preschimbat în dureri, care se urmau unele după altele pînă ce a murit singur și nefericit. János, al cărui nume este o anagramă a numelui eroului din legendă, a avut o soartă asemănătoare cu a lui Iason!

UN MATEMATICIAN INGENIOS

„Am fost un lucrător conștiincios, nu am fost superficial, am muncit pînă acum la bătrînețe. Spiritul meu a fost geometric m-a fermecat varietatea și frumusețea figurii..."

Alexandru Myller[1]

Nikolai Lobacevski care l-a încîntat pe Gauss prin ingeniozitatea lui, s-a născut în 1792, undeva în districtul Nijni-Novgorod și a rămas orfan de tată de la patru ani. Mama, fără avere, dar energică și inteligentă, a căutat să dea o educație solidă celor trei copii ai ei și de aceea s-a mutat în orașul Kazan, unde exista un liceu în care se putea învăța pe socoteala statului. Nikolai a arătat de la început un deosebit interes pentru matematici, interes ce a fost stimulat, în timpul cît a urmat liceul, de profesorul lui, C.I. Kartașevski. În 1807 s-a înscris ca student la fizico-matematici, la Universitatea de curînd înființată la Kazan, unde, din 1808, a venit ca profesor matematicianul german K. M. Bartels (1769 — 1836), care a contribuit mult la dezvoltarea matematică a tînărului Lobacevski. Bartels era unul dintre prietenii lui Gauss, îl cunoscuse din copilărie, el fiind pedagog la școala elementară în care a învățat Gauss; apoi, s-au întîlnit din nou în Göttingen, după ce Bartels terminase Facultatea de matematici. Cu această ocazie, Gauss l-a recomandat matematicianului M. Fuss (1755 — — 1826), care; în calitatea lui de secretar al Academiei din Petersburg, a contribuit la chemarea lui ca profesor al Universității din Kazan.

J. M. Bartels a fost un profesor și un pedagog deosebit. El l-a remarcat pe Lobacevski de la primele cursuri. În curînd, Consiliul Universității a luat la cunoștință că: „pro-

[1] Myller, Alexandru (1879—1965), matematician român.

Nikolai Ivanovici Lobacevski

fesorul Bartels va mai lucra acasă, cu studentul Lobacevski cîte patru ore pe săptămînă, pentru ca, apoi, el să poată explica şi celorlalţi studenţi ceea ce ei nu înţelegeau". În aceste cursuri particulare, Bartels l-a familiarizat cu cele mai noi lucrări matematice: cu primul volum din *Mecanica cerească* a lui P. S. Laplace (1749 — 1827), lucrare monumentală ce avea să apară între 1799 şi 1825 în cinci volume, în care se rezumau şi continuau cercetările lui Newton, D'Alembert, Clairaut, Euler, apoi cu *Disquisitiones arithmeticae* a lui C. F. Gauss, apărută în 1801. Astfel, sub îndrumarea lui Bartels, Lobacevski a cunoscut şi s-a îndreptat înspre curentul nou ce se manifesta în matematici sub directivele lui Gauss, Cauchy, Laplace etc. În 1810 s-a introdus un curs nou, acela de astronomie, predat de J. J. E. Littrow (1781 — 1840).

Lobacevski s-a dovedit şi acum unul dintre studenţii cei mai străluciţi şi dintre primii care l-au ajutat pe profesor să organizeze şi un observator astronomic. Din 1811, devenind asistentul lui Bartels, Lobacevski continuă munca de cercetare ştiinţifică, dar începe şi activitatea didactică,

Pierre Simon marchiz de Laplace

pe care o continuă mai intens din 1814 cînd este numit docent. În această calitate are de predat cursul de *Geometrie practică* și pe acela de *Teoria numerelor*. Peste doi ani, devenind profesor agregat al Universității din Kazan, a ținut cursurile de *Matematici elementare* pentru începători, *Cursul de geometrie și trigonometrie*, după caiete proprii, iar în zilele de luni și joi explica, în limba rusă, *Calculul diferențial și integral*, folosind operele lui Monge și Lacroix.

Urmărind această activitate didactică, apare evident că Lobacevski a fost pus în fața postulatului al V-lea al lui Euclid, dacă nu mai înainte, cel puțin atunci cînd a predat cursul său de *Geometrie*. A încercat și el, ca toți cei dinaintea lui, să-l demonstreze căci și lui i s-a părut că acesta nu-i destul de evident: „O demonstrație riguroasă a acestui postulat nu a putut fi găsită pînă acum, cele ce au fost date pot fi numite numai lămuriri, dar nu pot fi considerate demonstrații matematice, în adevăratul înțeles al cuvîntului".

În 1823 Lobacevski a prezentat Universității, spre publicare, manuscrisul unui manual de geometrie întocmit de el, de o structură deosebită de cea a manualelor obiș-

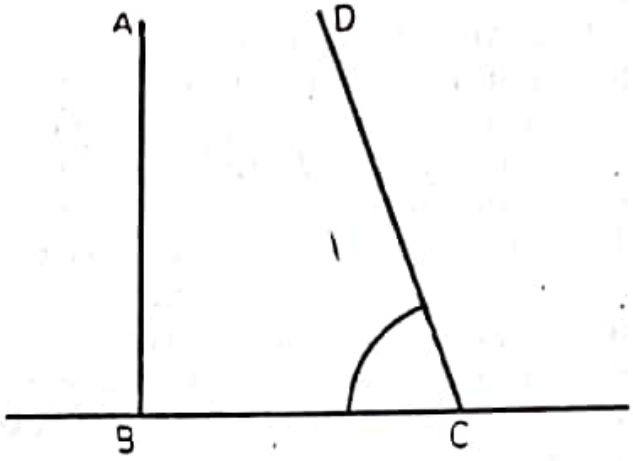
Gaspard Monge

nuite. Mai intîi, Lobacevski a expus în primele cinci capitole toate teoremele legate de măsurarea segmentelor și a unghiurilor, ce nu depindeau de postulatul paralelelor, atît cele din geometria plană, cît și cele din geometria în spațiu ; pe acestea le-a considerat ca un *tot*, acela al *geometriei absolute*. Restul teoremelor de geometrie erau expuse începînd cu capitolul al șaselea, pe care îl începe cu explicația : „Măsura ariilor se bazează pe faptul că două drepte se întretaie dacă ele cad pe aceeași parte a unei alte drepte și în așa fel ca una dintre ele să fie perpendiculară, iar cealaltă să fie înclinată sub un unghi ascuțit de partea perpendicularei. Dacă se prelungesc suficient, dreptele AB și CD trebuie să se întîlnească, dacă AB este perpendiculară pe BC, iar cealaltă, CD, este înclinată sub un unghi ascuțit C de partea perpendicularei AB". După cum se observă ușor, Lobacevski a introdus aici postulatul lui Euclid sub forma adoptată de Legendre în geometria sa.

Manuscrisul a fost trimis academicianului N. Fuss, spre a-și da avizul. Acesta a respins lucrarea, prin următorul

verdict: „Dacă autorul crede că această carte poate servi ca manual didactic, atunci el dovedește că nu are o noțiune exactă despre plenitudinea adevărurilor geometrice, care

Fig. 11



alcătuiesc sistemul unui curs începător, despre metoda matematică, despre necesitatea absolută a unor definiții clare și exacte și despre consecvența firească a adevărurilor geometrice. Dealtfel, lucru curios, autorul ia metrul francez ca unitate de măsură a liniilor drepte și a suta parte a sfertului de cerc ca unitate de măsură a arcelor de cerc, unități inventate în timpul Revoluției franceze, cînd nebunia națiunii a vrut să distrugă tot ce exista înainte". Autorul era sfătuit să refacă manualul; dar Lobacevski nu a urmat sfatul, așa că manuscrisul a rămas nepublicat. Peste trei ani, el a depus un nou manuscris, de data aceasta la o ședință a „Secției fizico-matematice" de pe lîngă Universitatea din Kazan, care era însoțit de următoarea scrisoare: „... Anexez lucrarea mea, intitulată *Expunere prescurtată a principiilor geometriei cu o demonstrație riguroasă a teoremei paralelelor*. Doresc să cunosc părerea colegilor mei asupra ei și, dacă ea este favorabilă, rog cu respect ca lucrarea propusă de mine să fie publicată în *Memoriile* secției de fizică și de matematică, motiv pentru care am preferat să-l scriu în limba franceză, căci în această limbă comună acum savanților de pretutindeni se editează și aceste *Memorii*".

Nici de data aceasta manuscrisul nu a fost publicat, iar colegii lui nu au făcut nici un fel de raport ca să explice faptul. Ei nu au putut înțelege că ceea ce Lobacevski numea

„o demonstrație riguroasă a teoremei paralelelor" reprezenta o nouă formă a teoriei paralelelor conținînd în germen principiile geometriilor neeuclidiene. Ca și János Bolyai, Lobacevski făcea pasul decisiv pentru construirea unei noi geometrii, dar, ca și pe Bolyai, contemporanii nu l-au înțeles. Aceasta a fost marea durere a vieții lui. A învins-o printr-o muncă încordată și devotată față de știință, față de Universitate și față de studenți.

Din anul 1827, Lobacevski a fost ales rector al Universității din Kazan și a condus această instituție pînă în 1846. În această calitate, el a construit o clădire pentru Universitate, care reprezintă pînă azi cea mai frumoasă podoabă a orașului. După mărturia contemporanilor, îl puteai vedea cățărîndu-se neobosit pe schele ca să urmărească lucrările în toate amănuntele lor. Dar, această ocupație nu l-a făcut să-și întrerupă munca didactică. A predat cursuri variate de *Matematici superioare*, *Mecanică*, *Geometrie*, *Astronomie*, *Algebră*, *Fizică elementară* pentru elevii școlii de meserii înființată din inițiativa lui în Kazan și, în plus, *Geometria imaginară*, pe înțelesul tuturor acelora care doreau să o cunoască. Lobacevski iubea tineretul și a înțeles că trebuie să capete o educație serioasă. La sfîrșitul anului 1828, el i-a adresat următoarele cuvinte: „Intrînd în această instituție, tineretul nu va auzi vorbe goale... aici se învață ceea ce există în realitate și nu numai ceea ce este cunoscut de minții frivole. Omul s-a născut pentru a fi stăpînul, regele Naturii, dar înțelepciunea cu care trebuie să domnească nu-i este dată din naștere, ea se capătă prin învățătură... Mintea, într-o continuă activitate, tinde să cîștige cinstire, să se înalțe; numai astfel omenirea va putea merge din perfecțiune în perfecțiune fără să se mai oprească vreodată".

Cu toată această activitate intensă, Lobacevski a găsit și timp să continue cercetările în problema teoriei paralelelor. Între 1829—1830 a început să publice ideile la care ajunsese în *Expunerea prescurtată a principiilor geometriei* într-o serie de articole apărute în revista Universității, „Vestitorul Kazanului". Aceste articole reprezintă primul *Memoriu* pe care l-a tipărit Lobacevski în legătură cu geometria descoperită de el și a fost intitulat *Despre principiile geometriei*. Lucrarea a fost împărțită în trei părți. În prima parte sînt redate noțiunile și teoremele ce au format obiec-

tul „geometriei absolute", pe care o stabilise în manuscrisul *Geometria* din 1823. În partea a doua au fost reluate și dezvoltate ideile de bază ale geometriei neeuclidiene, așa cum au fost arătate în *Expunerea prescurtată* din 1826 (71). Aici s-au stabilit ecuațiile caracteristice pentru această geometrie, prin care se leagă laturile și unghiurile unui triunghi dreptunghic rectiliniu. În ultima parte au fost determinate metodele de calculare a lungimilor curbelor, a ariilor și volumelor suprafețelor din planul și spațiul neeuclidian prezentat aici. Preocupat de faptul ca geometria descoperită de el să nu conțină vreo contradicție și ca nici în teoremele ce vor fi descoperite mai tîrziu să nu se poată ivi o contradicție, în încheierea *Memoriului*, Lobacevski observă că există o perfectă analogie între ecuațiile trigonometrice descoperite de el și acelea binecunoscute din geometria sferică (72) : „Odată găsite ecuațiile care reprezintă relația între unghiurile și laturile unui triunghi și, în fine, expresiile generale pentru elementele de lungime, de arie și de volum a corpurilor, restul din geometrie înseamnă numai analiză, în care calculele nu se pot contrazice și nu pot conține altceva decît ceea ce este conținut și în primele ecuații din care au fost deduse toate relațiile dintre mărimile geometrice. Astfel că, dacă ar trebui să admitem că o contrazicere oarecare ne-ar obliga să renunțăm la principiile adoptate de noi în această geometrie nouă, o atare contradicție nu ar putea să se găsească decît în primele ecuații. Dar aceste ecuații se transformă în ecuațiile corespunzătoare ale trigonometriei sferice în care laturile a, b, c ale unui triunghi sferic sînt înlocuite cu ai, bi, ci ; or, raportul liniilor este la fel în geometria obișnuită și în trigonometria sferică ; așadar, geometria ordinară, trigonometria și această geometrie nouă sînt pretutindeni de acord. Acum, dacă analiza și geometria, — *să o numim imaginară* ca să o deosebim de geometria obișnuită —, sînt în acord, ne putem aștepta ca ele să se ajute reciproc... permițîndu-ne să găsim, ca anumite aplicații, valorile unor integrale definite pe care analiza, fără ajutorul geometriei, nu ni le-ar da decît mai greu".

În anul 1832, Universitatea din Kazan a prezentat memoriul lui Lobacevski Academiei de științe din Petersburg, în speranța că va fi apreciat. El a fost repartizat academicianului M. V. Ostrogradski (1801 — 1861), care, spre deo-

sebire de Gauss, *nu a înțeles nimic din ideile noi ce le cu-prindea*. Critica severă pe care a adus-o acestui memoriu se întoarce azi împotriva lui Ostrogradski și îi știrbește din autoritatea ce și-o crease odinioară : „Pare că autorul și-a propus să scrie în așa fel ca să nu fie înțeles și a reușit", așa începe Ostrogradski raportul său și îl continuă în același mod : „Cea mai mare parte a cărții mi-a rămas tot așa de neînțeleasă ca și cum nu aș fi văzut-o. Nu am înțeles decît cele ce urmează : Se poate admite că suma unghiurilor unui triunghi este mai mică decît două unghiuri drepte. Geometria care rezultă din această ipoteză este mai grea și mai întinsă decît aceea pe care o cunoaștem și poate da un mare ajutor în analiza pură și mai ales în teoria integralelor definite, căci ea a permis să se găsească valorile a două integrale definite, pe care nimeni nu le-a obținut încă și care ar fi greu de obținut prin alte mijloace. Asupra celor ce am citit cred că trebuie să comunic Academiei următoarele observații :

1) Dintre cele două integrale definite pe care domnul Lobacevski crede că le-a găsit, una este cunoscută. Se poate deduce din principiile cele mai elementare ale calculului integral. Valoarea celeilalte este în adevăr nouă și se datorează domnului rector din Kazan. Din nefericire, ea este falsă.

2) Tot ce am înțeles din geometria domnului Lobacevski este sub nivelul mediocru.

3) Tot ce nu înțeleg este prost redactat și din această cauză greu de priceput. În concluzie, cartea domnului rector Lobacevski are o greșeală și, fiind redactată fără grijă, nu merită atenția Academiei" (73).

Ca și cînd această critică nedreaptă nu ar fi fost suficientă ca să-i otrăvească bucuriile trezite de descoperirile făcute, Lobacevski avea să primească și alte lovituri, mai brutale și înjositoare, fiindcă proveneau de la marele public, cititor de reviste literare, care nu avea nimic comun cu descoperirile științifice și deci nu putea savura decît ridicolul. Aceasta fiindcă, în 1834, a apărut, în două reviste de circulație, un pamflet anonim, intitulat *Principiile geometriei domnului Lobacevski*, unde referatul lui Ostrogradski era amplificat într-un stil de batjocură nu numai la adresa lucrării, ci și a autorului (74).

Criticile nu l-au doborît însă pe Lobacevski. Avea prea multă încredere în adevărurile întrezărite de el și privea cu compătimire această ostentativă opoziție față de ideile revoluționare pe care le înfățișase. Mai mult chiar, a crezut că, pe undeva, colegii lui matematicieni aveau și dreptate, fiindcă memoriul lui era prea concentrat și ar fi trebuit prea multă bătaie de cap ca să fie priceput. De aceea, s-a hotărît să refacă toată lucrarea și să-i dea o formă mai accesibilă, adăugîndu-i, natural, și cele ce avea să mai descopere. O afirma singur, în *Introducerea* dintr-o lucrare ulterioară : „În limitele strîmte ale unui periodic nu puteam trata problema mea în toate amănuntele. Multe teoreme date fără demonstrație, absența calculelor destul de lungi și încîlcite din care nu am dat decît rezultatele, mă face să bănuiesc că lucrarea mea, la prima vedere obscură, nu trezea dorința de a fi cercetată cu atenție și putea chiar să semene neîncredere în rigurozitatea raționamentelor mele și a adevărului concluziilor la care ajunsesem".

Din anul 1834, prin inițiativa sa, a fost înființată o nouă revistă științifică : „Memoriile Universității din Kazan" și, începînd cu primul număr din 1835, Lobacevski a început să tipărească mai multe articole, privind acest subiect. Primul avea ca titlu „Geometria imaginară" ; el a fost scris totodată și în limba franceză, ca să fie trimis revistei condusă de Crelle : „Jurnal für reine und angewandte Mathematik", care l-a și publicat în 1837. Al doilea a apărut în 1836 : „Aplicații ale geometriei imaginare la anumite integrale" și continua, împreună cu cel dinaintea lui, să dezvolte problemele discutate în *Despre principiile geometriei*. A treia lucrare, mult mai voluminoasă, a apărut în numerele din 1837 și 1838, sub titlul : „Noi elemente ale geometriei cu o teorie completă a paralelelor". În aceasta, autorul și-a propus să revadă întreaga geometrie dintr-un punct de vedere nou și anume, ținînd seama de ambele ipoteze asupra paralelelor, aceea stabilită de Euclid și aceea considerată de el, folosind chiar metoda din *Elemente*, adică pe cale sintetică. Iată cum susține această hotărîre, chiar în *Introducerea* lucrării : „Principalul avantaj al analizei este că poate trece întotdeauna imediat, de la ecuații, la scopul fixat. Sinteza nu se supune la nici o regulă generală, dar trebuie să începem în mod necesar prin ea ca apoi, odată

ecuațiile găsite, să atingem, în același timp, linia de demarcație, de la care orice înseamnă știința numerelor... Ar fi zadarnic să vrem că considerăm acest caz, ca și întreaga teorie a paralelelor, din punct de vedere analitic". După o critică a fundamentelor geometriei, Lobacevski a considerat cele mai însemnate încercări de a demonstra postulatul paralelelor, și, insistînd îndeosebi asupra raționamentelor lui Legendre, a stabilit mai întîi eroarea din aceste raționamente și apoi a arătat că respectivele raționamente nu erau valabile în geometria necuclidiană. Apoi a analizat chiar noțiunile de bază ale geometriei : „spațiul, dimensiunea, locul, corpul, suprafața, linia, punctul, direcția, unghiul, acestea sînt cuvintele cu care începe geometria, cărora nu li se asociază niciodată noțiuni clare... Geometria începe de obicei atribuind corpului trei dimensiuni, suprafețelor două, liniilor una și punctului nici una. Numind cele trei dimensiuni lungime, lățime și înălțime și înțelegînd prin ele trei coordonate, se anticipă folosindu-se cuvinte care au un anumit sens în limbajul curent, însă, pentru o știință exactă, acest sens este încă nedefinit. Cum ne putem reprezenta clar ce înseamnă o măsură a lungimilor, cînd încă nu știm ce este o dreaptă ? Cum putem vorbi de lățime, de înălțime fără să fi vorbit mai întîi de perpendiculare, de plan, de faptul că dreptele perpendiculare pot fi coplanare sau situate în plane diferite ? În fine, dacă un punct este fără dimensiuni, prin ce calitate ajunge el obiectul unei judecăți ? Admițînd că îmi pot reprezenta clar o dreaptă, deși nu pot să formulez această acțiune în mod precis, cum trebuie să procedez ca, pornind de la această dreaptă, să stabilesc o dimensiune pentru curbă și două pentru suprafața curbă (75) ?"

Încurajat de tipărirea articolului său în vestita revistă a lui Crelle, Lobacevski a scris, în limba germană, volumul intitulat *Cercetări geometrice asupra liniilor paralele.* Acesta a apărut în 1840 și un exemplar i-a fost trimis lui Gauss, singurul care a înțeles frumusețea acestei lucrări, ceea ce l-a îndemnat să le cerceteze și pe celelalte, scrise în limba rusă (76).

Într-o scrisoare adresată lui Gerling în 1855, Gauss scria : „Operele lui Lobacevski pot fi comparate cu o pădure de nepătruns, ce nu poate fi traversată fără să-i fi

cercetat mai întîi fiecare dintre copacii ei". Dar această superbă apreciere nu a cunoscut-o Lobacevski, fiindcă Gauss, consecvent cu atitudinea ce a adoptat-o față de acest subiect, s-a abținut să facă vreo declarație publică despre opera lui Lobacevski. Totuși, mai norocos decît Bolyai, Lobacevski a putut avea bucuria de a se ști înțeles și prețuit de uriaș, prin propunerea făcută de el pentru a fi acceptat ca membru în Societatea matematică din Göttingen. Ultima lucrare pe care a mai scris-o Lobacevski în domeniul geometriilor neeuclidiene se intitulează *Pangeometria* și a apărut în 1855, cu ocazia celei de a 50-a aniversări a Universității din Kazan. Lucrarea a fost scrisă și în limba franceză, iar titlul ei complet este *Pangeometria sau manual de geometrie bazat pe o teorie generală și riguroasă a paralelelor*. Această operă nu conține alte rezultate noi față de celelalte stabilite anterior, în afară de denumire. *Geometria imaginară* se arătase a nu fi un nume potrivit, fiindcă această geometrie exista cu adevărat, deși încă nimeni nu-i recunoștea existența. *Pangeometria* fixa acestei geometrii un caracter mai general decît al geometriei euclidiene, căci ea o conținea pe aceasta din urmă, ca pe un caz limită.

Pangeometria a fost scrisă într-un mod și mai concentrat decît lucrările anterioare, de data aceasta pentru că autorul orbise și a dictat lucrarea unui fost elev de-al său. A fost și cîntecul de lebădă al acestui ingenios matematician, care s-a stins în luna februarie a anului 1856.

ULTIMA INTERVENȚIE

Calmă, cu pași egali, înainta caravana în
clinchet de clopoței.
Se îndrepta spre locuri neîntinate, spre depărtări
necunoscute.

Avetik Issahakian[1]

Spre deosebire de graba cu care se răspîndesc azi descoperirile matematice, recunoașterea geometriilor neeuclidiene s-a făcut cu multă zăbavă. Astfel, deși Lobacevski publicase în 1837, în *Jurnalul* lui Crelle, primul său articol, „Geometria imaginară", Gauss va afla despre acesta abia în 1840, cînd va primi și broșura *Cercetări geometrice*, iar Farkas Bolyai, care fusese informat despre apariția acestei broșuri din anul 1844, nu s-a grăbit să și-o procure decît în 1848. Chiar și János Bolyai, după ce primise cartea în 1848, a tărăgănat cu analiza ei pînă în 1851. În acest an, în timp ce la Tîrgu Mureș, János Bolyai dăruia tatălui său, ca dar de ziua lui, manuscrisul cuprinzînd *Observații critice la Cercetările geometrice ale lui Lobacevski*, Bernhard Riemann (1826—1866) susținea, în prezența lui Gauss, examenul de doctorat în matematici, preluînd astfel, fără să bănuiască, și sarcina de a dezvolta problema geometriilor neeuclidiene (77). Aceasta s-a întîmplat în anul 1854, cînd, după ce a trecut și examenul de docență, B. Riemann s-a prezentat din nou lui Gauss, fiindcă, după regulamentul Facultății de filozofie din Göttingen, era obligat să susțină și o disertație de abilitare, cu un subiect ales de profesor din trei titluri propuse de candidat. Fiindcă îndrăgise și *Fizica matematică* — lucra ca asistent în laboratorul lui Wilhelm Weber (1804—1891), cel care construise, împreună cu Gauss, încă din 1834, primul telegraf electric ce funcționa

[1] Issahaklan, Avetik (1875—1927), poet armean.

Bernhard Riemann

efectiv între laboratorul de fizică al lui Weber și Observatorul astronomic unde locuia Gauss — dorea să trateze o problemă generală din domeniul *Fizicii teoretice*. De aceea, primele două subiecte le formulase din acest domeniu, iar al treilea, întocmit mai mult din complezență, ca să-i facă plăcere profesorului, avea ca titlu: „Asupra ipotezelor ce stau la baza geometriei". Obiceiul era să se aleagă unul din primele două subiecte propuse de candidat și Riemann nu bănuia că Gauss ar putea călca această tradiție. Dar Gauss a ales cel de-al treilea subiect; văzuse în acest tînăr geniul care era în stare să dezvolte, într-o formă nouă, problema care l-a pasionat o viață întreagă și nu a putut rezista ispitei de a o vedea înaintînd.

În acest an, 1854, se împlinea un sfert de veac de cînd Lobacevski publicase prima lucrare despre geometriile neeuclidiene. De atunci și pînă acum, problema fusese în bună parte rezolvată căci și Bolyai și Lobacevski tipăriseră descoperirile lor. Deși importante, ele nu fuseseră băgate în seamă de nimeni, în afară de Gauss, care își exprimase într-un mod foarte elogios aprobarea sa, dar o făcuse confidențial și de aceea ea nu era cunoscută decît într-un cerc foarte restrîns de prieteni intimi.

Alegerea lui Gauss i-a stricat toate socotelile lui Riemann. Într-o scrisoare pe care a trimis-o tatălui său, îi spunea : „Eram așa de absorbit de cercetările mele asupra unificării tuturor legilor fizicii, încît, atunci cînd mi s-a comunicat subiectul conferinței mele de abilitare, nu m-am putut smulge lor... sînt din nou încurcat de cînd am de pregătit această lucrare... Sînt din ce în ce mai convins că Gauss a lucrat la această problemă mulți ani și a discutat-o cu prietenii săi (între alții cu Weber). Ți-o spun confidențial, de frică de a nu fi considerat un închipuit : sper că nu voi ajunge prea tîrziu și că-mi va fi recunoscut meritul de cercetător independent“ (78).

Riemann avea pe atunci 28 de ani, era un tînăr modest și foarte timid. Nu avea de ce să se teamă căci în disertația sa s-au găsit ideile fundamentale ale unor geometrii mult mai generale decît acelea imaginate pînă atunci. Fiind prezentate unui public care nu era de specialitate, expunerea a fost făcută fără de formule, calcule sau demonstrații.

Ca să putem urmări ideile prezentate de Riemann în lucrarea sa *Asupra ipotezelor ce stau la baza geometriei*, trebuie să ne întoarcem la secolul al XVII-lea și să privim mai îndeaproape metoda analitică pe care a introdus-o Fermat și Descartes în studiul geometriei. Ea se bazează pe folosirea unui sistem de axe de coordonate, cu ajutorul căruia s-a putut stabili o corespondență biunivocă între punctul T, cel mai simplu element geometric, și o pereche de numere algebrice (x, y), dacă punctul este plan, sau o ternă (x, y, z) dacă punctul se află în spațiu. Aceste numere algebrice, numite coordonatele punctului, reprezintă distanțele punctului față de axele sistemului de coordonate (două axe perpendiculare în plan sau trei axe perpendiculare între ele în spațiu) (fig. 12). Cu ajutorul coordonatelor, orice relație metrică sau geometrică dintre mai multe puncte se traduce printr-o relație algebrică. Așa, de pildă, distanța AB dintre punctele $A\ (x_1, y_1)$ și $B\ (x_2, y_2)$ din plan se exprimă prin relația $d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Mai mult, la orice curbă plană îi corespunde o ecuație cu două necunoscute $y = f(x)$ sau $F(x, y) = 0$, iar la orice suprafață din spațiu îi corespunde o ecuație cu 3 necunoscute $z = f(x, y)$ sau $F(x, y, z) = 0$ și invers. Prin aceste convenții, proprietățile geometrice ale

curbelor și suprafețelor se traduc în calcule algebrice și invers, din relațiile algebrice între coordonatele unui punct situat pe o linie sau o suprafață se pot găsi proprietăți și

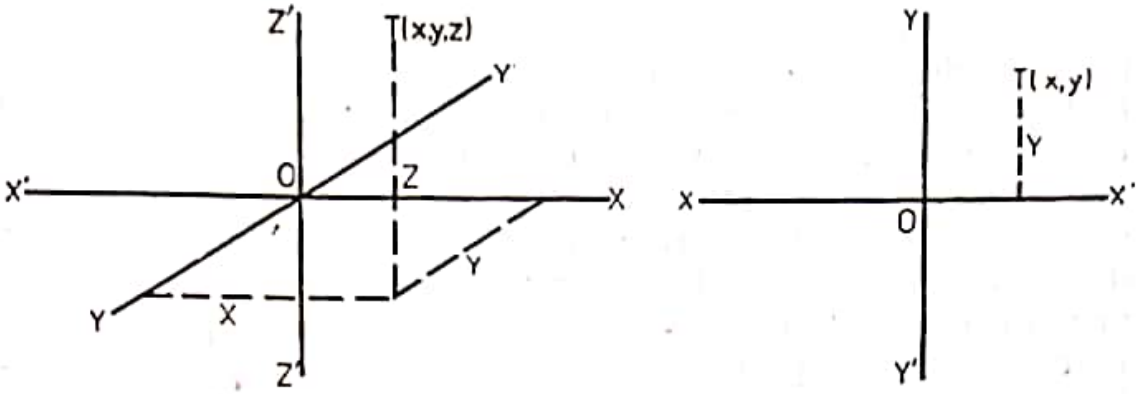


Fig. 12

relații geometrice ale figurilor corespunzătoare. Metoda analitică folosită în *geometria analitică*, introdusă de Descartes și Fermat, a preschimbat astfel spațiul geometric într-o mulțime abstractă de dublete (x, y), sau de triplete (x, y, z) de numere algebrice ordonate, cu alte cuvinte spațiul, considerat pînă atunci ca o *mărime geometrică* dedusă pe cale intuitivă din observații, a fost *aritmetizat*, distanța s-a preschimbat dintr-o mărime geometrică, măsurabilă, într-o mărime aritmetică, stabilită prin calcul. Însă spațiul, odată devenit aritmetic, este susceptibil de generalizare prin înmulțirea numărului de dimensiuni, de la trei, la oricît de multe: n. Un asemenea spațiu cu „n dimensiuni" desigur abstract, se deosebește de spațiul înconjurător cu „trei dimensiuni" doar prin faptul că el se prezintă ca o mulțime de grămezi de numere algebrice ordonate, în care fiecare grămadă nu conține numai trei numere algebrice (x, y, z), ci n numere, care, pentru comoditate, să le notăm: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$. Ele sînt coordonatele punctului T din spațiul euclidian cu n dimensiuni. Ideea unor asemenea spații multidimensionale a avut-o J. Wallis încă din secolul al XVII-lea. În veacul următor, Jean R. D'Alembert (1717–1783) și J. L. Lagrange (1736–1813), considerînd timpul ca a patra dimensiune, au tratat problemele de mecanică drept niște probleme de geometrie analitică dintr-un spațiu cu patru dimensiuni. În 1843, Arthur Cayley (1821–1895) și, un an mai tîrziu, Hermann G. Grassmann (1809–1877)

au prezentat o expunere sistematică a unei geometrii analitice n-dimensionale, analoagă întru totul cu geometria carteziană cu trei dimensiuni.

Dar dacă geometria analitică putea rezolva prin calcul multe probleme geometrice, ca, de pildă, să determine punctul de intersecţie dintre două drepte date, sau aria închisă de trei drepte care nu sînt concurente, sau volumul unui tetraedru, ea nu putea fi de nici un ajutor în problemele legate de vecinătatea unui punct de pe o curbă sau suprafaţă, nu putea scrie ecuaţia tangentei într-un punct dat la o curbă, nici calcula lungimea unui arc de curbă sau aria unei suprafeţe curbe, ori volumul unui corp care nu-i mărginit de feţe plane. În asemenea probleme se cerea ajutorul calculului diferenţial şi integral, descoperit în secolul al XVII-lea de Newton şi Leibniz. Astfel, în secolul al XVIII-lea s-a mai adăugat o nouă ramură geometriei, anume *geometria diferenţială* sau *infinitezimală*, care s-a dezvoltat prin cercetările lui A. Clairaut (1713–1765), L. Euler (1707–1783) şi mai ales ale lui Gaspard Monge (79). Însă lucrarea lui C. F. Gauss *Cercetări generale asupra suprafeţelor curbe*, apărută în 1827, este fundamentală ; ea a servit ca bază la dezvoltarea geometriei diferenţiale în decursul veacului al XIX-lea şi o influenţează încă şi acum. Prin această operă, Gauss a marcat o nouă epocă în cercetarea suprafeţelor, deoarece s-a ridicat de la problemele pivind doar anumite proprietăţi caracteristice unor suprafeţe particulare la probleme generale legate de teoria suprafeţelor, care au găsit aplicaţii în fizică, mecanică, astronomie, geodezie, cartografie etc. Astfel, el a introdus, ca metodă de cercetare, pe lîngă *reprezentarea parametrică a suprafeţelor*, şi reprezentarea sferică a unei suprafeţe ; cu ajutorul acesteia a putut stabili o măsură a curburii unei suprafeţe într-un punct al ei.

Reprezentarea parametrică a unei suprafeţe constituie o generalizare a procedeului folosit de Descartes şi iată de ce. Dacă numim x, y, z coordonatele unui punct din spaţiul euclidian, după cum se ştie, dacă aceste coordonate sînt funcţii determinate şi continue de un parametru u, atunci :

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u) \qquad (1)$$

sînt ecuaţiile parametrice ale unei curbe C. Analog:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \qquad (2)$$

reprezintă ecuaţiile parametrice ale unei suprafeţe B dacă funcţiile îndeplinesc anumite condiţii, care nu-i locul să fie discutate aici.

Dacă se dă parametrului u o valoare constantă $u = u_0$, atunci ecuaţiile (2) se reduc la forma (1) şi deci reprezintă o curbă C situată pe suprafaţa S definită de ecuaţiile (2) (fig. 13). La fiecare altă valoare u_i a lui u, curba $x = x(u_i, v)$, $y = y(u_i, v)$, $z = z(u_i, v)$ se schimbă. Aşadar, putem spune că ecuaţia u = const. reprezintă o familie de curbe de pe suprafaţa S. Analog şi ecuaţia v = const. arată existenţa altei familii de curbe de pe suprafaţa S. Curbele din aceste două familii se întîlnesc, punctele lor de intersecţie caracterizîndu-se prin valorile $u = u_i$ şi $v = v_k$. Deci u_i, v_k reprezintă *coordonatele curbilinii* ale punctului de intersecţie de pe suprafaţă şi ele nu depind de poziţia suprafeţei în spaţiul înconjurător. Curbele u = const. şi v = const. formează pe suprafaţă o reţea curbilinie de coordonate, la fel după cum şi dreptele x = const. şi y = const. formează în plan o reţea

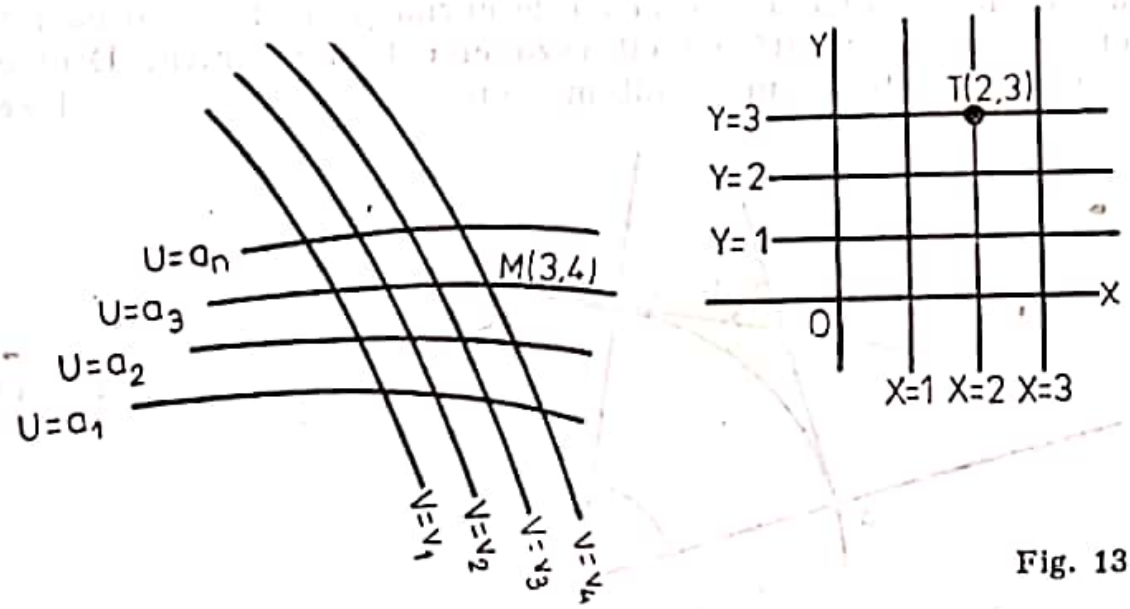


Fig. 13

dreptunghiulară de coordonate (80). Considerînd două puncte A şi B, foarte apropiate de pe suprafaţă, avînd drept coordonate (u, v) şi respectiv $(u + du, v + dv)$ şi

calculînd, după formulă, distanța dintre ele, Gauss a găsit următoarea expresie diferențială :

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du \cdot dv + G\,dv^2,$$

unde coeficienții E, F și G sînt funcții bine definite de parametrii u și v. Această expresie, avînd forma unui polinom omogen de gradul al doilea față de diferențialele du și dv, se numește *prima formă diferențială pătratică a suprafeței* (81). Ea arată că dacă se cunosc valorile coeficienților E, F și G în fiecare punct de-a lungul unei curbe de pe suprafață, atunci se poate calcula lungimea acelei curbe, cu alte cuvinte E, F și G determină anumite proprietăți *intrinseci* ale suprafeței (intrinseci, adică independente de poziția suprafeței față de sistemul de coordonate cartezian din spațiul cu trei dimensiuni și dependente numai de forma caracteristică a suprafeței însăși). Gauss a arătat că există și alte mărimi care depind tot numai de coeficienții formei I a suprafeței, printre acestea sînt *unghiul dintre două curbe de pe suprafață*, *aria unei porțiuni de suprafață*, precum și *curbura totală* într-un punct de pe suprafață.

Curbura unei suprafețe este o noțiune intuitivă care nu are nevoie de explicații. O suprafață plană se consideră că nu are curbură, o sferă este la fel de curbă peste tot și o găsim cu atît mai curbată cu cît raza ei este mai mică. Dintre două suprafețe strîmbe, putem spune fără ezitare care ni se

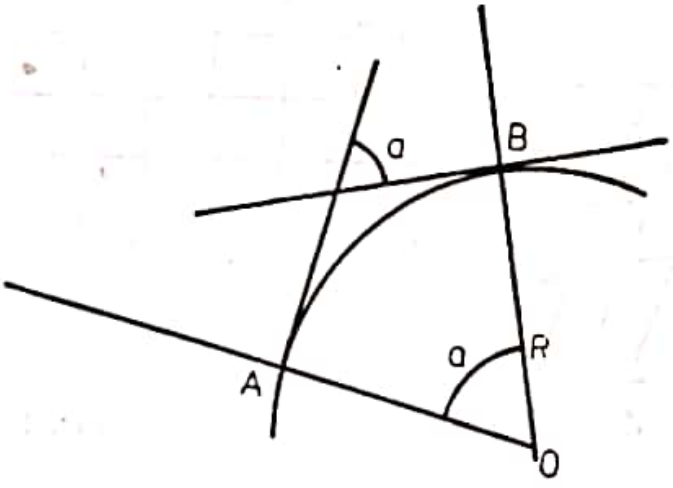


Fig. 14

pare că este, într-o anumită porțiune, mai curbă decît alta. Însă dacă se pune întrebarea : cum se poate exprima

printr-o formulă matematică curbura unei suprafeţe într-un punct al ei ? — răspunsul este destul de complicat, de aceea nici nu există *o singură formulă*, ci mai multe ! Ca să înţelegem în ce constă complexitatea problemei, vom începe

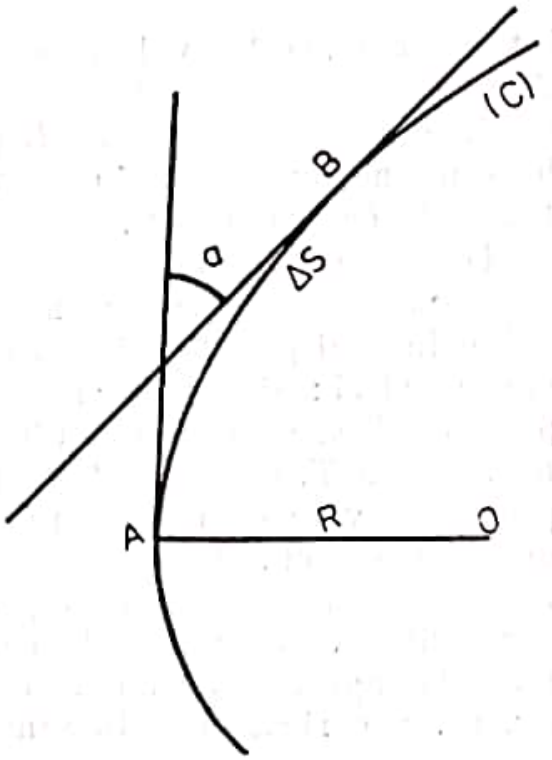


Fig. 15

arătind cum se calculează curbura unei curbe plane într-un punct al ei. Ca model se ia cercul ; curbura lui este constantă şi se măsoară prin inversul razei. În cazul unui arc de cerc, curbura se exprimă prin divergenţa razelor (a normalelor) la extremităţile arcului, sau, ceea ce înseamnă aici acelaşi lucru, prin unghiul dintre cele două tangente în acele puncte, (fig. 14), adică folosind formula care dă lungimea arcului : $L_{AB} = a \cdot R$ şi deci :

$$\text{curbura}_{(AB)} = \frac{1}{R} = \frac{a}{L_{AB}}.$$

În cazul unei curbe oarecare C, curbura medie a unui arc de curbă AB (fig. 15) se calculează după aceeaşi formulă, adică se măsoară unghiul dintre tangentele la extremităţile arcului şi se împarte prin lungimea arcului. Făcînd ca lungimea arcului AB să tindă către zero, limita acestui raport

se consideră, prin definiție, ca măsurînd curbura curbei plane în punctul A :

$$\text{curbura în } A = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta a}{\Delta s} = \frac{da}{ds} = \frac{1}{R},$$

iar inversa acestei valori, măsurată pe normala în punctul A, este raza de curbură a curbei în acel punct. Se înțelege că ducînd un cerc cu raza R și cu centrul în punctul O stabilit pe normală, acest cerc va avea în punctul A aceeași tangentă ca și curba C.

Dacă ne referim la un punct de pe o suprafață (fig. 16), printr-un punct al ei trec o infinitate de curbe plane, fiecare curbă avînd în acel punct altă curbură. Ne putem imagina aceste curbe astfel : să ducem mai întîi normala la suprafață în punctul T și să ne închipuim un plan secant ce trece prin normală în T, care se rotește în jurul ei de la o poziție dată pînă ce revine de unde a plecat. Fiecare poziție a planului determină o curbă plană pe suprafață, curbă avînd ca normală tocmai normala la suprafață. Dar, spre deosebire de cazul unei curbe plane, în cazul acestora se poate ca normala la suprafață să nu fie neapărat îndreptată înspre concavitatea curbei, ci și în sens opus. De pildă, dacă supra-

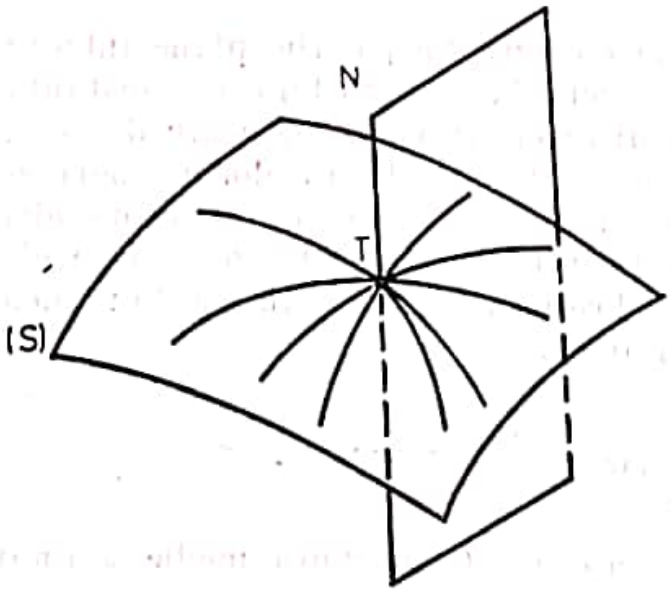


Fig. 16

fața are formă ovoidală (fig. 17), atunci toate curbele de secțiune au concavitatea îndreptată în același sens, pe cînd dacă suprafața are formă de șa (fig.18), curbele au concavitățile îndrep-

tate într-un sens sau altul și, dacă ar fi vorba de o suprafață cilindrică (fig. 19), printre secțiuni există și linii drepte. De aceea, înainte de a vedea cum se măsoară curbura unei

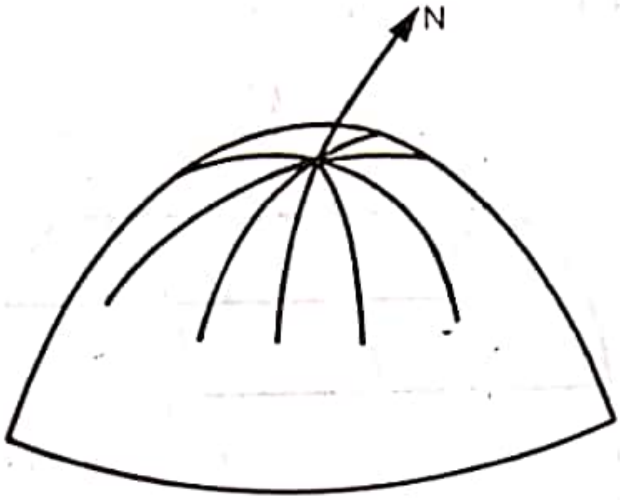


Fig. 17

suprafețe într-un punct al ei, se impune să se stabilească *un sens pozitiv al normalei la suprafață* astfel ca să putem defini curbura unei secțiuni normale ca o mărime algebrică, afectată de semnul plus sau minus după cum concavitatea curbei este îndreptată înspre sensul pozitiv sau negativ al normalei la suprafață în T.

Problema curburii l-a preocupat și pe Euler. El a găsit că printre secțiunile normale care trec printr-un punct al unei suprafețe există două, ale căror curburi au valori extreme, adică una dintre ele are cea mai mică curbură, iar alta cea mai mare, și acestea sînt în așa fel așezate încît planele lor de secțiune sînt perpendiculare. Direcțiile acestor plane se numesc *direcțiile principale* de pe suprafață în acel punct, iar curburile acestor două curbe se numesc *curburile principale* ale suprafeței în punctul respectiv.

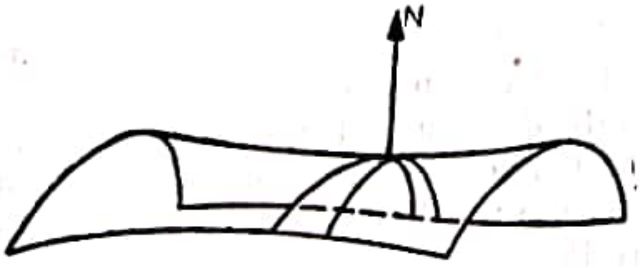


Fig. 18

Euler s-a oprit aici, dar Gauss a mers mai departe cu cercetările legate de curburile principale și a căutat să stabilească o măsură a curburii suprafeței într-un punct al ei.

Astfel, a găsit expresia $k = \frac{1}{R_1 R_2}$, unde R_1 și R_2 sînt razele de curbură principale ale punctului (82). Această formulă poartă numele de *curbura totală a suprafeței* sau

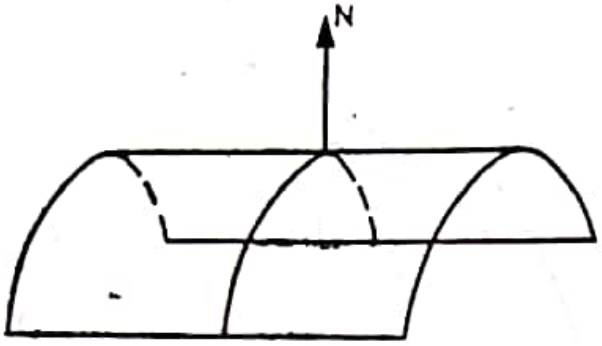


Fig. 19

curbura gaussiană, ca să se deosebească astfel de alte expresii propuse pentru măsurarea curburii unei suprafețe într-un punct al ei (83). Pe lîngă simplitate, ea mai are și o proprietate remarcabilă, aceea că în calcularea ei nu intervin decît coeficienții E, F, G și derivatele acestora; cu alte cuvinte, formula stabilește o proprietate intrinsecă a suprafeței. Anume, două suprafețe, care au *aceeași curbură totală* în toate punctele corespunzătoare, se pot deforma, fără a fi rupte sau întinse, în așa fel ca să se suprapună una peste alta. Această proprietate o are planul și sfera. Pe plan poate aluneca un alt plan, rămînînd cu toate punctele sale pe primul plan, fiindcă *planul are curbura totală peste tot nulă*. La fel și pe o sferă, dacă se așază o calotă sferică a altei sfere, *de aceeași rază cu a primei sfere*, atunci această calotă poate aluneca oricum pe suprafața sferei, fără să se dezlipească de ea. Aceasta fiindcă, și în acest caz, *curbura totală a sferei este constantă* și egală cu $1/R^2$. Gauss a extins proprietatea la toate suprafețele cu curbură totală constantă, arătînd că printr-o deformare, fără rupere sau întindere, aceste suprafețe se pot aplica una peste alta. De pildă, un con sau un cilindru, tăiate de-a lungul unei generatoare, se pot așterne pe un plan, fiindcă aceste suprafețe au, ca și planul, curbura totală zero, una dintre razele lor principale de curbură fiind infinită.

În cursul celor șapte săptămîni cît și-a pregătit teza de abilitare, Riemann a cercetat îndeaproape rezultatele pe care le-a stabilit Gauss în lucrarea publicată de el: *Cercetări*

generale asupra suprafețelor curbe, și a cugetat îndelung la consecințele ce ar putea decurge din ele. Dar nu numai aceste probleme l-au frămîntat. El nu se putea desprinde cu totul de preocupările lui anterioare, de cercetările lui în legătură cu „unificarea tuturor legilor fizicii", așa că a mai încercat și o soluție a acestei probleme. Răspunsul pe care l-a dat a fost *cel așteptat* și nu a ajuns, așa cum se temea el, prea tîrziu. Lui Riemann i s-a recunoscut, pe drept cuvînt, meritul de „cercetător independent" și chiar mai mult, acela de deschizător de drumuri.

Riemann a generalizat ideea genială a lui Gauss, aceea de a considera că geometria intrinsecă de pe o suprafață este caracterizată prin *elementul ei liniar* (forma metrică a suprafeței) și prin curbura ei totală. În felul acesta a putut arăta că există mai multe feluri de geometrii diferențiale, în afară de cea euclidiană, și chiar a definit unele dintre ele. Dar, ca să o poată face, a construit mai întîi „varietățile n-dimensionale" ale spațiului geometric, generalizînd astfel și noțiunea de spațiu cu mai multe dimensiuni. „Se știe", spunea el în disertație, „că geometria presupune ca fiind date atît conceptul de spațiu, cît și primele noțiuni fundamentale pentru construcții în spațiu. Ea dă despre ele numai definiții nominale, în timp ce determinările esențiale apar în formă de axiome. Relațiile dintre aceste presupuneri rămîn însă obscure ; nu se înțelege nici dacă legătura dintre ele este necesară și în ce măsură, nici dacă *apriori* legătura este posibilă (84). Cauza acestei stări de lucruri a constat în faptul că noțiunea generală de mărime cu mai multe dimensiuni, între care se află și mărimile geometrice, a rămas complet neelaborată. De aceea, eu mi-am propus să construiesc, în primul rînd, noțiunea de mărime cu mai multe dimensiuni, cu ajutorul noțiunii generale de mărime. De aici va decurge că... spațiul formează numai un caz particular de mărime tridimensională". În continuare, Riemann a arătat că, analitic, se pot construi o infinitate de geometrii diferențiale, natura lor depinzînd de modul în care se definește elementul linear, adică lungimea infinitezimală a unui arc de curbă din spațiul respectiv. În particular, el s-a oprit la cazul care *generalizează geometria intrinsecă de pe o suprafață*, adică la cazul în care distanța dintre două puncte infinitezimal apropiate $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ și $B(x_1 + dx_1,$

$x_2 + dx_2, \ldots, x_n + dx_n)$ se calculează prin *forma diferențială pătratică pozitiv definită*:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots . n)$$

unde coeficienții a_{ik} sînt numere perfect definite de coordonatele punctului A sau de ecuațiile parametrice $x_1 = x_1(u)$, $x_2 = x_2(u) \ldots x_n = x_n(u)$ ale unei curbe (C) care trece prin A și B. Asemenea geometrii n-dimensionale se numesc azi *geometrii riemanniene*. „Aceste expresii diferențiale", observa în continuare Riemann, „sînt caracterizate, în orice punct, prin măsura curburii. În cazul suprafețelor, acestei mărimi i se poate da o semnificație intuitivă, în sensul că ea este produsul ambelor curburi ale suprafeței în acest punct... Pentru a da o semnificație concretă măsurii curburii unei varietăți cu n-dimensiuni într-un punct dat și într-o direcție dată pe o suprafață dusă prin acel punct, trebuie să plecăm de la faptul că linia cea mai scurtă, care pornește de la un punct, este complet determinată dacă se dă direcția ei inițială ..."

Riemann arată că *această curbură* apare ca o proprietate intrinsecă a spațiului și deci a extins noțiunea de curbură totală a unei suprafețe la varietățile n-dimensionale. În consecință, geometriile euclidiene cu n-dimensiuni au fost numite „varietăți plane": „Într-o varietate plană n-dimensională, măsura curburii este nulă în fiecare punct, în orice direcție. Varietățile în care măsura curburii este peste tot nulă se pot considera ca un caz particular al varietăților a căror măsură a curburii este peste tot constantă. Caracterul comun al acestor varietăți, a căror măsură a curburii este constantă, poate fi exprimat și prin aceea că figurile pot fi deplasate fără a suferi modificări în lungime. Căci, este evident că figurile nu s-ar putea deplasa prin translație și rotație, dacă măsura curburii n-ar fi aceeași în fiecare punct în toate direcțiile." De aici Riemann a tras concluzia: „Este ușor de văzut că suprafețele a căror măsură a curburii (constantă) este pozitivă, se pot aplica întotdeauna pe o sferă a cărei rază este egală cu 1 împărțit prin rădăcina pătrată a măsurii curburii."

Continuînd să se ocupe de suprafețele de curbură constantă, Riemann a susținut că geometriile de pe aceste suprafețe

sînt, de fapt, *geometrii neeuclidiene plane.* Ca să dovedească această afirmaţie, el a prezentat *o nouă geometrie neeuclidiană, aceea a planului fără drepte paralele.* În această nouă geometrie neeuclidiană intră în discuţie nu numai postulatul al V-lea, prin înlocuirea lui cu acela că „printr-un punct la o dreaptă nu se poate duce nici o paralelă", dar şi înseşi noţiunile de dreaptă infinită şi de spaţiu infinit. Aceste noţiuni sînt înlocuite cu acelea de *dreaptă* şi *spaţiu finite, dar nemărginite.* „Nemărginirea spaţiului posedă o siguranţă empirică mai mare decît oricare altă experienţă. De aici însă nu decurge deloc infinitatea; dacă presupunem corpurile independente de poziţie, adică dacă le-am atribui o măsură a curburii constantă, spaţiul ar fi, în mod necesar, mai degrabă finit îndată ce această valoare a curburii ar avea o valoare pozitivă oricît de mică. Dacă direcţiile iniţiale situate pe suprafaţă se prelungesc sub forma celor mai scurte linii (85) s-ar putea obţine o suprafaţă nemărginită avînd măsura curburii pozitivă constantă, deci o suprafaţă care într-o varietate tridimensională plană ar lua forma unei suprafeţe sferice şi care, în consecinţă, este finită."

În disertaţia sa de abilitare, Riemann a clarificat *pentru prima oară* şi deosebirea care trebuie făcută între o linie *infinită* şi alta *nelimitată* sau *nemărginită,* luînd ca model cercurile mari de pe sferă. Căci, pe sferă, cercurile mari sînt liniile *cele mai scurte* care unesc două puncte, cu alte cuvinte ele corespund *dreptelor* din plan. Unind două puncte de pe sferă printr-un arc de cerc mare, acest arc se poate prelungi încontinuu şi nedefinit, urmînd mereu drumul său în linie dreaptă pe cercul mare din care face parte, drum care *este nemărginit, deşi este închis şi deci are o lungime finită* (86).

A doua geometrie neeuclidiană, propusă de B. Riemann, satisface ipoteza lui Saccheri cu privire la unghiul obtuz. În acest caz, aşa după cum au arătat Saccheri şi Lambert, suma unghiurilor unui triunghi rectiliniu este mai mare decît două unghiuri drepte. Considerînd-o ca avînd drept model geometria de pe o sferă, faptul era cunoscut din antichitate, diferenţa dintre această sumă şi două unghiuri drepte fiind numită „excesul sferic". Această geometrie se deosebeşte de geometria Bolyai-Lobacevski nu numai prin faptul că linia dreaptă este închisă, finită şi nemărginită şi că toate dreptele se întîlnesc, dar că, uneori, prin două

puncte din planul riemannian pot trece o infinitate de drepte. În adevăr, este suficient să presupunem că pe sferă cele două puncte sînt diametral opuse, ca, de pildă, cei doi poli, prin care trec toate cercurile meridiane. Din faptul că geometria neeuclidiană propusă de Riemann are *ca model geometria de pe sferă*, ca o consecinţă foarte importantă rezultă că, în această geometrie, *nu poate exista nici o contradicţie*. Cu alte cuvinte, nu poate fi găsită vreo teoremă care să contrazică alte teoreme anterioare sau chiar ipotezele ce stau la baza acestei geometrii, întrucît geometria sferică este privită ca o ramură a geometriei euclidiene din spaţiul nostru tridimensional, geometrie ce este lipsită de contradicţii. Nu tot aşa de uşor se putea afirma aceasta despre geometria lui Bolyai-Lobacevski. Riemann a stabilit prima interpretare intuitivă a unei geometrii neeuclidiene şi aceasta va avea mai tîrziu o mare importanţă. Va avea-o mai tîrziu, fiindcă, deocamdată, în anul 1854, pe cînd Riemann îşi rostea conferinţa, nimeni din cei prezenţi nu a sesizat acest fapt. Strălucitoarea disertaţie a trecut atunci tot aşa de neluată în seamă ca şi lucrarea lui Bolyai, ca şi scrierile lui Lobacevski. Chiar nici Riemann nu se va mai gîndi la ea şi nu o va publica ! Numai Gauss, *singur Gauss*, a urmărit-o atent şi mulţumit. I-a admirat maturitatea de gîndire, simţind în faţa lui un egal ; căci, de data aceasta, nu a mai putut spune, ca în atîtea alte situaţii, că *cele ce auzea îi erau cunoscute mai de mult*. Era împăcat şi ascultîndu-l, auzea parcă clinchetul de clopoţei al unei caravane care înainta cu paşi egali spre depărtări necunoscute.

AGITAȚIE ÎN MASĂ

„Geometria necuclidiană a dat cercetărilor matematice nu numai un avînt de o rară fecunditate, dezvăluindu-i orizonturi nebănuite, dar și unele concepții filozofice asupra spațiului au trebuit să fie adînc revizuite."

Simion Stoilov[1]

Disertația lui Riemann din 10 iunie 1854 nu a trezit nici un ecou în rîndul auditorilor, iar vorbele, așa cum spune proverbul latinesc, au zburat îndată după ce au fost rostite. Și nimeni nu și-ar mai fi adus aminte de acele ingenioase înmănunchieri de idei, netipărite atunci, dacă nu s-ar fi păstrat manuscrisul conferinței. Le-a uitat și Gauss chiar de a doua zi, cu toate laudele ce le adresase profesorului Weber pentru succesul talentatului său asistent, fiindcă era preocupat de lucrările ce se executau în vederea construirii unei căi ferate ce avea să lege Göttingen cu celelalte orașe din Germania. Atît de mult îl interesau acestea atunci, încît s-a hotărît să se ducă să le vadă cu ochii lui, deși nu părăsise orașul de vreo 20 de ani. Călătoria nu s-a sfîrșit cu bine. trăsura s-a răsturnat, iar Gauss, care avea 77 de ani, a avut de suferit consecințele loviturilor. Peste o lună însă a asistat la întîmpinarea primului tren ce sosea în Göttingen, iar peste o jumătate de an a încetat din viață.

În locul lui Gauss a fost chemat P. G. Lejeune Dirichlet (1805—1859), profesor la Universitatea din Berlin. În lumea matematicienilor, numirea lui Dirichlet ca *succesor* al lui Gauss însemna recunoașterea lui ca *primul matematician al lumii!* Apreciind talentul lui Riemann și cunoscînd modestia lui, care l-ar fi ținut și mai departe în postul de asistent, Dirichlet a stăruit ca să fie promovat profesor. În 1859, cînd locul lui Gauss a devenit din nou vacant, prin moartea

[1] Stoilov, Simion (1887—1961), matematician român.

Gustav Lejeune-Dirichlet

timpurie a celui chemat să-l ocupe, catedra a fost atribuită lui B. Riemann, care, prin importantele lucrări ce le publicase, s-a dovedit demn de a purta titlul de „al doilea succesor" al lui Gauss. Dar nici el nu s-a bucurat de un mai îndelung răgaz pe această culme. Așa se face că, în 1866, Richard Dedekind (1831—1916), care-i era bun prieten, cercetînd lucrările rămase în manuscris, a găsit și disertația ținută în 1854 : „Asupra ipotezelor ce stau la baza geometriei" și a publicat-o imediat. Dedekind nu a publicat această lucrare numai ca un omagiu adus memoriei prietenului său și nici ca să-i mai adauge un titlu de glorie pe lîngă numeroasele ce le avea, ci pentru că, citind-o și-a dat seama că era lucrarea pe care geometrii de atunci o așteptau cu aceeași sete cu care un ogor uscat aștepta ploaia.

În decursul celor 12 ani, cîți au trecut de cînd Riemann prezentase disertația, în concepțiile matematicienilor se petrecuseră schimbări nebănuite. Schimbările au apărut la cinci ani după moartea lui Gauss, îndată ce a început publicarea corespondenței sale matematice. Din acele scrisori, citite cu mult interes și cu tot atîta curiozitate, s-a descoperit pasiunea pe care a avut-o Gauss, din tinerețe, pentru

teoria paralelelor, pentru geometriile neeuclidiene, pentru problemele legate de spaţiu şi de noţiunile fundamentale ale geometriei. Din scrisoarea către Gerling, din 1832, au aflat despre existenţa *Appendix*-ului, precum şi de înalta apreciere a lui Gauss pentru János Bolyai. Din scrisorile către J. Encke, din 1841, şi altele, ca de pildă aceea către Schumacher din 1846, s-a ştiut cît de mult l-au impresionat pe Gauss lucrările lui Lobacevski. Iar din altă scrisoare, mai veche, adresată lui Bessel în 1828, s-a cunoscut că el era hotărît să nu-şi dea în vileag descoperirile ce le-a făcut „de vreo 40 de ani" în legătură cu aceste probleme, fiindcă „se temea de urletele beoţienilor". Probabil că aceasta a fost şi singura scuză a lui Gauss, care ar putea explica teribilele drame sufleteşti ce le-a provocat, prin tăcerea sa, acelor doi mari matematicieni care au ajuns, independent unul de altul, la descoperirea şi formularea primei geometrii neeuclidiene. Şi dacă faţă de ei acum nimic nu se mai putea îndrepta, căci Lobacevski murise în 1856, iar János Bolyai în 1860, se putea repara cel puţin marea nedreptate făcută de Gauss istoriei matematicilor. Poate de aceea, dintr-o dată, atenţia multor matematicieni s-a îndreptat către operele acestor doi năpăstuiţi de soartă!

Cel mai zelos şi entuziast cercetător s-a arătat profesorul Jules G. Hoüel (1823—1886), de la Facultatea de ştiinţe din Bordeaux. Avea o bogată şi variată cultură matematică, îl interesau deopotrivă geometria şi trigonometria, analiza şi mecanica, compunea tabele de calcul şi totodată era mare amator de literatură, avea un stil limpede, iar lucrările lui erau urmărite cu plăcere. În 1863 publicase un documentat memoriu: „Încercări ale unei expuneri raţionale a principiilor fundamentale ale geometriei elementare", în renumita revistă germană de matematici „Archiv der Mathematik und Physik". În 1866 a terminat traducerea în limba franceză a *Cercetărilor geometrice despre teoria paralelelor* scrisă de Lobacevski în limba germană şi a publicat-o în volumul IV din *Memoriile* Societăţii de ştiinţe din Bordeaux, împreună cu extrasul din scrisoarea adresată în 1846 de Gauss lui Schumacher, scrisoare care se termina cu această recomandare: „Consider de datoria mea să-ţi atrag atenţia asupra acestei cărţi, care-ţi va face, fără îndoială, cea mai mare plăcere."

Un an mai tîrziu, în volumul V al *Memoriilor* Societății științifice din Bordeaux, a apărut și traducerea, în limba franceză, a *Appendix*-ului lui J. Bolyai. Această lucrare era urmată de o „Notă asupra vieții și lucrărilor celor doi matematicieni W. și J. Bolyai", scrisă, la cererea lui Hoüel, de către arhitectul F. Schmidt.

Dar J. Hoüel nu s-a mulțumit numai cu aceste date. El a stăruit pe lîngă matematicianul italian B. Boncompagni (1821—1894), pe atunci președintele secției de matematici a Academiei din Roma, ca să intervină pe lîngă președintele Academiei ungare pentru a se permite cercetarea manuscriselor rămase de la János Bolyai, donate de el Bibliotecii Colegiului din Tîrgu Mureș. Președintele Academiei ungare nu auzise pînă atunci despre un matematician cu acest nume și mai puțin încă despre *Appendix*-ul lui! Adresa a trezit curiozitatea matematicienilor unguri, iar Franz Schmidt, care a publicat tot în 1867 articolul său și în „Archiv der Mathematik", s-a străduit timp de 30 de ani să culeagă datele despre viața acestor doi matematicieni, care nu puteau fi separați nici după moarte, cum nu au putut fi separați nici cît au trăit (87).

Tot în 1867, matematicienii italieni au luat cunoștință de opera lui Lobacevski, atît prin articolul „Considerații istorico-critice asupra geometriei imaginare sau neeuclidiene a lui Lobacevski", publicat de A. Forti în două reviste matematice, una din Bologna și cealaltă din Pisa, cît și prin articolul „Despre geometria imaginară a lui Lobacevski", al lui G. Battaglini (1826—1894), apărut în „Giornale di Matematica". Revista, al cărei fondator era Battaglini, începînd din acel an, va consacra ani de-a rîndul multe pagini lucrărilor de geometrie neeuclidiană. De altfel, chiar în acest al cincilea volum al revistei, Battaglini a publicat și traducerea în limba italiană a *Pangeometriei*, pe care Lobacevski o scrisese în limba franceză.

Nici matematicienii germani nu au rămas indiferenți în fața acestor frămîntări. În ediția a doua a *Elementelor de matematică* pentru școlile secundare, apărută în 1867, autorul lor, profesorul R. Balzer (1818—1887) din Dresda, explica ideile lui Lobacevski, prezentîndu-i și lucrările sale legate de teoria paralelelor.

Lucrările lui Lobacevski au început să fie remarcate chiar și de matematicienii ruși. În 1868, profesorul A. Letnikov a tradus în limba rusă *Cercetările geometrice*, adăugîndu-le și o introducere. În această introducere, lucrarea este prezentată favorabil, arătîndu-se că problema paralelelor a atras, „prin profundul interes filozofic" atenția unor matematicieni eminenți din Apus, ca Bertrand, Legendre, precum și a academicianului rus V. Buneakovski. Dealtfel, Buneakovski încă din 1853 a început să-și exprime părerile în legătură cu această problemă.

Și anul 1868 a fost bogat în evenimente importante. Mai întîi, în vol. VI din *Jurnalul* lui Battaglini a apărut traducerea în limba italiană a *Appendix*-ului lui J. Bolyai. Apoi, în același volum, era și o lucrare a matematicianului italian Eugenio Beltrami (1835—1900), cu titlul „Încercări de a interpreta geometria neeuclidiană". Acest articol a avut un larg răsunet în toate cercurile matematice din Europa, fiind tradus de J. Hoüel în limba franceză și apărînd chiar în anul următor în Analele științifice ale Școlii Normale din Paris.

Articolul lui Beltrami începe cu o descriere precisă a direcției înspre care s-au îndreptat cercetările matematice precum și explicarea cauzei: „În ultima vreme, publicul matematic se ocupă de noile concepții care par să schimbe profund întreaga urzeală a geometriei clasice. Aceste concepții nu sînt de dată recentă, Gauss le-a îmbrățișat din primii ani ai carierei lui științifice și, cu toate că în nici una dintre scrierile lui nu le-a expus explicit, scrisorile lui au arătat predilecția pe care a cultivat-o și entuziasmul lui față de opera lui Lobacevski."

Lucrarea lui Beltrami așază dintr-o dată geometria lui Lobacevski pe o temelie care nu se va mai putea clătina. Dar, ca să înțelegem aceasta mai ușor, trebuie să ne referim la lucrările matematicianului german F. Minding (1806—1885) care l-au condus pe Beltrami la concluziile sale. Încă din 1839, Minding s-a ocupat de suprafețele cu curbură constantă negativă. Potrivit rezultatelor stabilite de Gauss în teoria suprafețelor, toate suprafețele cu aceeași curbură constantă se pot suprapune unele peste altele printr-o deplasare și deformare fără întindere sau rupere. Minding a căutat suprafețele de rotație de curbură constantă negativă,

pe care se pot aplica celelalte suprafețe cu aceeași curbură constantă negativă și a găsit trei suprafețe diferite; dintre care, mai tîrziu, pe cea mai simplă a numit-o *pseudosferă* (88).

În anul următor, Minding a observat, într-o altă ordine de idei, că dacă în formulele trigonometriei sferice se înlocuiesc lungimile laturilor triunghiurilor sferice cu acelea ce se obțin prin înmulțirea respectivă cu $i = \sqrt{-1}$, atunci formulele căpătate reprezintă relațiile dintre elementele unui triunghi geodezic de pe o suprafață de curbură constantă negativă. Această proprietate a triunghiurilor geodezice de pe suprafețele de curbură constantă negativă i-a sugerat lui Minding și numirea de *pseudosferă*. Dar proprietatea unor formule de a fi deduse din acelea ale triunghiurilor sferice a fost observată mai întîi de Taurinus, apoi și de Lobacevski, atunci cînd ei au stabilit formulele pentru trigonometria neeuclidiană a planului pentru care suma unghiurilor dintr-un triunghi este mai mică decît două unghiuri drepte. Este interesant de remarcat că, deși Lobacevski era contemporan cu Minding, iar Lobacevski a avut chiar revista în care Minding și-a publicat această lucrare, el nu a citit-o și de aceea nu a putut cunoaște acea analogie care l-ar fi putut duce la descoperirea făcută mai tîrziu de Beltrami, după cum nu a făcut-o nici Minding, necitind lucrarea lui Lobacevski, publicată tot în 1840, în limba germană (89).

Meritul de a fi stabilit o corespondență între descoperirea lui Minding și aceea a lui Lobacevski i-a revenit lui Beltrami. El a arătat astfel că geometria lui Lobacevski nu-i alta decît geometria intrinsecă pe o pseudosferă, așa după cum geometria lui Euclid este geometria pe un plan. Cu un an mai înainte, în 1867, R. Dedekind a publicat articolul lui Riemann „Asupra ipotezelor care stau la baza geometriei" în vol. XIII din „Analele din Göttingen". Prin bogăția și originalitatea ideilor sale, care acum puteau fi înțelese cel puțin de cîțiva dintre geometrii timpului, această lucrare a însemnat o amețitoare surpriză. J. Hoüel l-a tradus în limba franceză și a apărut în 1870, în volumul III din „Annali di Matematica", W. K. Clifford (1845—1879) l-a publicat în vol. VIII din „Nature", în limba engleză, iar mai tîrziu a fost răspîndit în multe limbi și din celelalte continente.

După cum știm, în articolul lui Riemann se prezenta, mai întîi, o altă geometrie neeuclidiană bidimensională, prin care se completau, armonios, ipotezele posibile legate de problema paralelelor dintr-un punct la o dreaptă, și, apoi, se pleda pentru o nouă orientare a cercetărilor, făcîndu-le să treacă de la nivelul sintetic al geometriei elementare la acela analitic introdus de geometria diferențială. Și, ca și cum ar fi fost necesar să se recîștige timpul pierdut în lîncezeala primelor șase decenii ale veacului, matematicienii din multe țări ale Europei se străduiau acum să pătrundă și să studieze cît mai grabnic problemele sugerate de lucrările lui Beltrami (90) și Riemann. Cu toate că ultima fusese gîndită și compusă cu 14 ani mai înainte decît cea dintîi, cu toate că erau independente, ele apăreau strîns legate una de alta. Căci, dacă Beltrami a arătat că geometria lui Bolyai-Lobacevski era echivalentă cu geometria intrinsecă pe o suprafață cu curbura totală constantă negativă — pseudosfera —, Riemann a dovedit că geometria neeuclidiană bidimensională găsită de el era echivalentă cu geometria intrinsecă pe o suprafață cu curbura totală constantă pozitivă-sfera —, iar „între ele", geometria euclidiană înseamnă geometria intrinsecă pe o suprafață cu curbura zero. Prin aceste interpretări, cele două geometrii neeuclidiene părăseau domeniul abstract al fanteziei și deveneau dintr-o dată tot așa de concrete ca și geometria plană obișnuită. Dintr-odată, nimeni nu și-a mai pus întrebarea dacă în șirul de teoreme ce s-ar putea deduce cîndva în aceste două geometrii nu va exista vreuna care să se contrazică sau să contrazică ipotezele căci, întocmai după cum geometria lui Riemann este echivalentă și se transformă în geometria de pe sferă, adică a unei suprafețe din spațiul nostru obișnuit — geometria sferică, ramură a geometriei obișnuite în care nu s-a găsit pînă acum nici o contradicție —, tot așa și geometria lui Bolyai-Lobacevski este geometria pe pseudosferă care, ca și sfera, este o suprafață din spațiul nostru obișnuit, născută prin rotația unei curbe numită *tractrice*, în jurul asimptotei sale (91).

În cartea binecunoscută *Știință și ipoteză*, matematicianul și filozoful Henri Poincaré (1845—1912), ocupîndu-se de interpretarea geometriilor neeuclidiene, arăta că s-ar putea stabili cu ajutorul unui dicționar, asemănător dicțio-

Henri Poincaré

narelor pentru limbi, în care cele două coloane de cuvinte să corespundă noţiunilor geometrice avînd aceeaşi semnificaţie în geometria euclidiană din spaţiu şi în geometria lui Lobacevski, că şi *geometria neeuclidiană cu trei dimensiuni* este lipsită de contradicţie. Să luăm teoremele lui Lobacevski şi să le traducem cu ajutorul acestui dicţionar, aşa după cum traducem, de pildă, un text german cu ajutorul unui dicţionar german-francez. Vom obţine astfel teoremele din geometria obişnuită. De exemplu, această teoremă a lui Lobacevski : suma unghiurilor unui triunghi este mai mică decît două unghiuri drepte, se traduce astfel : dacă un triunghi curbiliniu are ca laturi linii geodezice, suma unghiurilor acestui triunghi curbiliniu va fi mai mică decît două unghiuri drepte. Astfel, oricît de departe am „împinge" consecinţele ipotezelor lui Lobacevski, nu vom ajunge niciodată la o contrazicere. În adevăr, dacă două teoreme ale lui Lobacevski ar fi contradictorii, acelaşi lucru s-ar întîmpla cu „traducerile" acestor două teoreme făcute cu ajutorul „dicţionarului", dar aceste traduceri sînt teoreme din geometria obişnuită şi nimeni nu crede că geometria obişnuită ar avea contradicţii (92).

Immanuel Kant

Dovedind necontradicţia fiecăreia dintre cele două geometrii neeuclidiene, se rezolva astfel o problemă pusă de geometri cu vreo două mii de ani mai înainte. Anume, se putea afirma cu tărie că postulatul paralelelor este independent de celelalte postulate admise de Euclid şi că, deci, nu poate fi o teoremă ce ar decurge din celelalte postulate. Era un mare pas înainte şi făcîndu-l s-ar putea crede că s-a pus capăt teribilei agitaţii de care erau cuprinşi geometrii din ultimul pătrar al veacului al XIX-lea şi, odată cu aceasta, şi aventurii geometriilor neeuclidiene. Adevărul era însă altul. Odată lămurită problema necontradicţiei geometriilor neeuclidiene, rămîneau şi se puneau altele, la fel de importante şi la fel de chinuitoare. Una dintre acestea era problema spaţiului. O amintiseră pe rînd Gauss, J. Bolyai, Lobacevski şi cu ea îşi începuse B. Riemann disertaţia: „Geometria presupune că fiind dată noţiunea de spaţiu, cît şi primele noţiuni fundamentale pentru construcţii în spaţiu... nu se înţelege nici dacă legătura dintre ele este necesară... nici dacă apriori legătura este posibilă". În această introducere, Riemann se referea la concepţia filozofică a lui Immanuel Kant

(1724—1804), care în *Critica raţiunii pure*, apărută în 1781, afirma că : „1) Spaţiul nu este o noţiune empirică, provenită din experienţele exterioare ; 2) Spaţiul este o reprezentare necesară, *apriori* ; 3) Spaţiul este o intuiţie pură ... în raport cu el, o intuiţie *apriori* (nu empirică) ce serveşte de bază pentru toate noţiunile ce le formăm. Astfel, toate principiile geometrice, ca, de exemplu, acela că într-un triunghi suma a două laturi este mai mare decît a treia, nu reiese din noţiunile generale despre linie şi despre triunghi, ci dintr-o intuiţie, apriori". Această concepţie filozofică se baza pe faptul că pînă la începutul secolului al XIX-lea se presupunea că geometria euclidiană avea un *caracter absolut*, ea servea dealtfel ca model pentru toate ştiinţele, pentru că adevărurile ei, de o perfectă siguranţă, se deduceau logic, pornind de la anumite premise evidente.

Descoperirea geometriilor neeuclidiene şi dovada necontradicţiei lor contraziceau însă *intuiţia spaţială apriori*, presupusă de Kant. De aceea, atacurile împotiva părerilor acestui filozof, formulate mai întîi de Gauss în scrisorile particulare şi de Bolyai şi Lobacevski în scrierile lor, erau acum exprimate făţiş şi cu argumente puternice. Astfel, Hermann Helmholtz (93), unul dintre savanţii cei mai străluciţi din secolul al XIX-lea, a publicat mai multe articole în care discuta şi el, alături de Riemann, natura spaţiului geometric. În unul dintre ele : „Asupra faptelor ce stau la baza geometriei," apărut chiar în 1868, el scria : „În geometrie avem mereu de-a face cu figuri ideale, a căror înfăţişare fizică nu este decît o aproximare a cerinţelor noţiunii şi noi decidem dacă un corp este solid, dacă are feţe plane, dacă muchiile sînt drepte, prin intermediul acelorași, propoziţii, a căror exactitate reală ar trebui examinată şi dovedită". În altă lucrare, din 1870 : „Despre originea şi semnificaţia axiomelor geometrice", ataca din nou părerile lui Kant asupra originii apriorice a cunoştinţelor geometrice : „Faptul că poate exista şi s-a putut construi o ştiinţă cum este geometria, a atras întotdeauna atenţia tuturor acelora care se interesau îndeaproape de teoria cunoaşterii. Printre ramurile ştiinţelor umane nu există o alta ca ea, care să ne apară ca o Minervă complet înarmată din capul lui Jupiter ... singura metodă folosită de ea este deducţia. Concluziile sînt deduse din concluzii şi totuşi nici o persoană cu bun simţ nu se îndoie-

ște că rezultatele geometrice au aplicații practice în lumea reală : agrimensură, arhitectură, construcții de mașini ; fizica matematică folosește principiile geometrice ca să calculeze orice fel de relații spațiale, toți așteaptă ca rezultatele calculate să coincidă cu acelea obținute prin experiențe și nimeni, niciodată, nu s-a înșelat atunci cînd calculele erau bine făcute".

După această introducere, Helmholtz discută pe îndelete cauzele ce l-au determinat pe Kant să-și formuleze părerea că proprietățile spațiului fac parte integrantă din înțelegerea noastră determinată de intuiție și, înlăturîndu-le, ajunge la concluzia că tot ce cunoaștem despre spațiu este ceea ce am învățat din experiență. Dacă am trăi într-un spațiu sferic sau pseudosferic, impresiile noastre despre lume ne-ar dicta să adoptăm geometria neeuclidiană a lui Riemann sau pe aceea a lui Lobacevski, nimic nu ne-ar conduce înspre axiomele geometriei euclidiene, care ne sînt sugerate numai de experiențele noastre ancestrale. „Dacă ne putem imagina și spații de altă natură, nu mai poate fi valabilă părerea lui Kant că axiomele geometriei sînt în mod necesar consecințele unei forme apriorice transcendentale a intuiției."

La aceste discuții de natură filozofică, discuții care au avut o puternică influență asupra dezvoltării ulterioare a geometriilor neeuclidiene, a mai luat parte și renumitul geometru englez W. Clifford (94). După ce a tradus articolul lui Riemann, el a continuat să cerceteze și să aprofundeze problemele expuse de Riemann într-o serie de articole. Dacă aceste probleme ni se par astăzi evidente, aceasta se datorește tocmai lucrărilor ce au fost alcătuite atunci. Așa, de pildă, în „Exactitatea legilor matematice", după ce deosebea înțelesul *practic* : „o foarte strînsă aproximație, cît de strînsă depinde de împrejurări", de înțelesul teoretic al cuvîntului *exact* : „cunoașterea unei legi exacte în sens teoretic ar fi echivalentă cu o infinitate de observații", Clifford adăuga : „noi posedăm un mare număr de cunoștințe de acest fel în formulele de geometrie sau mecanică și tocmai exemplul acestor științe i-a determinat pe oameni să considere exactitatea și în celelalte domenii". Însă această exactitate a legilor geometrice nu s-a dovedit absolută : „La începutul acestui secol, bazele geometriei au fost criticate, independent, de doi matematicieni : Lobacevski și nemuritorul Gauss, iar rezul-

tatele au fost extinse și generalizate recent de Riemann și Helmholtz. Iar concluziile la care au condus cercetările lor arată că ... adevărul asupra spațiului trebuie decis prin experiență."

Iată și cîteva fragmente dintr-o altă lucrare de o rară frumusețe, scrisă tot de Clifford și avînd ca titlu : *Postulatele științei spațiului* : „Ceea ce a fost Copernic față de Ptolemeu, a fost Lobacevski față de Euclid ... Fiecare dintre ei a realizat o revoluție așa de mare în ideile științifice, comparabilă numai cu aceea făurită de celălalt. Și cauza importanței transcendente a acestor două schimbări constă în aceea că ele au provocat schimbări în concepția Cosmosului. Înainte de Copernic, oamenii cunoșteau totul despre Univers. Ei arătau în școli, cu mîna pe inimă, tot ce a fost și ce va fi. Pentru unii, Pămîntul era plat, iar bolta albastră a cerului se odihnea peste ei ca și domul unei catedrale ; stele, reci și strălucitoare erau țintuite pe cer, iar Soarele și planetele se mișcau printre ele în sfere de cristal. Pentru alții, mai bine informați, Pămîntul era un glob în centrul Universului, iar cerul o sferă concentrică ... și dacă ar fi existat ceva dincolo de cer, ar fi fost un spațiu gol care nu avea nevoie de nici o descriere. Istoria acestui *tot* putea fi urmărită înapoi pînă acolo unde începea, dincolo fiind o eternitate neschimbată ce nu avea nevoie de istorie. Viitorul putea, de asemenea, să fie prezis în termeni generali, oricît de departe, după care urma iar o eternitate neschimbată. Oricum, în ambele cazuri, Universul era un lucru cunoscut. Efectul enorm al sistemului lui Copernic, și al descoperirilor astronomice care au urmat, a fost că în locul acelei științe puține ce se numea *știința Universului, a Eternității și a Imensității*, am primit o știință despre mult mai multe lucruri, dar noi o numim *știință despre Aici și Acum*. Putem spune multe lucruri despre sistemul solar, dar el este numai casa noastră și nu cetatea noastră. Noi putem spune și cîte ceva despre sistemul stelar căruia aparține Soarele nostru, dar acesta este numai sistemul nostru stelar și nu Universul. Noi vorbim despre *Aici* cu conștiința unui *Acolo*, de cealaltă parte, pe care îl vom cunoaște cîndva, însă nu știm nimic despre el acum ... Dar mai rămînea ceva de făcut. Legile spațiului și ale mișcării presupun un spațiu infinit și o durată

infinită. Dacă ipotezele euclidiene sînt adevărate, atunci geometria planului de la infinit este tot așa de binecunoscută ca și geometria oricărei porțiuni din această cameră. În acest spațiu infinit și perfect de bine cunoscut, Universul este situat pentru cel puțin o parte din timpul infinit și perfect de bine cunoscut, Așa că cel puțin aici avem cunoștințe reale în legătură cu Cosmosul, ceva ce este adevărat în *Imensitate* și *Eternitate*. Acest ceva a fost însă suprimat de Lobacevski și urmașii lui. Geometrul de azi nu știe nimic despre natura spațiului existent acum la o distanță infinită ; el nu știe nimic despre proprietățile acestui spațiu prezent într-o eternitate trecută sau viitoare. El știe doar că legile presupuse de Euclid sînt adevărate, cu o precizie pe care nu o poate atinge nici o experiență directă, nu numai în locul în care sîntem acum, ci și în alte locuri, situate la o distanță de noi pe care nici un astronom nu o poate imagina, dar le știe ca *Aici* și *Acum* ; de cealaltă parte există un *Acolo* și *Atunci* despre care acum nu știe nimic, dar despre care va putea afla mai tîrziu. Iată paralelismul dintre opera lui Copernic și a succesorilor săi, pe de o parte, și opera lui Lobacevski și a succesorilor lui, pe de alta. În ambele, știința *Imensității* și a *Eternității* a fost înlocuită cu știința despre *Aici* și *Acum*".

Noțiunea spațiului a fost mult discutată și de H. Poincaré. Dăm aici un extras semnificativ din volumul intitulat *Valoarea științei*, în care se ocupă tocmai de spațiu : „În spațiu noi cunoaștem triunghiuri rectilinii în care suma unghiurilor este egală cu două unghiuri drepte ; dar cunoaștem, de asemenea, triunghiuri curbilinii în care suma unghiurilor este mai mică decît două unghiuri drepte. Existența unora nu-i mai îndoielnică decît a altora. Dacă dăm laturilor celor dintîi numele de drepte, înseamnă că am adoptat geometria euclidiană ; dacă dăm laturilor celor din urmă numele de drepte, înseamnă că am adoptat geometria neeuclidiană. Astfel că, întrebîndu-ne care geometrie este convenabil să o adoptăm, înseamnă că ne întrebăm la care linii este convenabil să le dăm numele de drepte ?"

Aceste cîteva fragmente, ce au fost citate aici, sînt o mărturie a agitației dezlănțuite după publicarea scrisorilor lui Gauss, din care matematicienii au putut afla că subiectul geometriilor neeuclidiene este demn de a fi luat în seamă. Rezultatele ce vor urma vor întări impresia lui W. Clifford, care a privit opera lui Bolyai și Lobacevski și a succesorilor lor drept revoluționară, aducînd dealtfel și alte argumente pentru a o susține.

O TENTATIVĂ ÎNDRĂZNEAȚĂ

„e ca o oaste ridicată
cu surle, cu trompete
și cu arme".

Profira Sadoveanu[1]

În al treilea volum din *Istoria generală a științei* (95), Ch. Mozaré consideră secolul al XIX-lea drept „secolul paradoxurilor", informîndu-ne că multă vreme a fost poreclit „stupidul secol al XIX-lea", fiindcă nu era un secol al tradițiilor, ci unul al exploziilor, în care „totul se fărîmița". Cîteva dintre rezultatele stabilite în capitolul precedent au confirmat temeinicia acestor calificative. Întîmplările ce urmează cuprind și alte exemple de manifestare a tendințelor de explozie și de fărîmițare, tot din domeniul geometriei. Însă, totodată, și o tentativă îndrăzneață de realizare a unei admirabile sinteze, așa cum se și cuvenea să se întîmple într-un „secol al paradoxurilor"!

La începutul secolului al XIX-lea, pe cînd Gauss, Bolyai și Lobacevski descopereau geometria neeuclidiană, un alt geometru, ofițer de geniu în armata lui Napoleon, căzut prizonier în 1812 în Rusia și aflat în închisoarea Saratov de pe Volga, frămînta în minte principiile unei noi geometrii, pe care o va numi *Geometria proiectivă*. Era Victor Poncelet (96). În 1822, el a publicat la Paris *Tratat despre proprietățile proiective ale figurilor*, care a avut mult succes. Se găseau aici închegate, într-o perfectă formă, multe dintre ideile ce fuseseră expuse în mod izolat, începînd din antichitate, relativ la proprietățile geometrice ale figurilor ce rămîneau neschimbate prin proiecție centrală sau prin secțiune. De pildă, el a încadrat în *geometria proiectivă* teorema

[1] Sadoveanu, Profira (n. 1906), scriitor român.

Jean Victor Poncelet

cunoscută din secolul al IV-lea î.e.n. cu privire la secțiunile unui con circular drept cu un plan, deducînd proprietățile conicelor astfel formate din proprietățile proiective ale cercului. Dealtfel, toți marii pictori ai Renașterii, dorind să redea cît mai exact într-un plan ceea ce vedeau ei în spațiu, s-au ocupat de perspectivă (97) și astfel au stabilit teoreme ale geometriei proiective. În secolul al XVII-lea, G. Desargues (1591 – 1661) a formulat chiar principiile geometriei proiective în cîteva din lucrările pe care le-a tipărit la Paris și anume *Perspectiva* (1636), *Însemnări cu privire la evenimentele ce se produc la întîlnirea unui con cu un plan* (1639) și *Teoria perspectivă adresată teoreticienilor* (1643) (98). Mai puțin norocos decît Poncelet, lucrările lui nu au fost băgate în seamă și au fost descoperite mult după ce geometria proiectivă se consolidase ca ramură independentă a geometriei. Cele trei studii, publicate la începutul secolului de către Lazare Carnot (1753 – 1823): *Despre corelația figurilor în geometrie* (1801), *Geometria de poziție* (1803) și *Încercări asupra teoriei transversalelor* (1806) (99), au fost folosite de Poncelet în *Tratatul* ce intenționa „să dea no-

Lazare Carnot

ţiunilor geometrice acea extensiune şi acea generalitate care există în natura lor" (100).

Poncelet a insistat asupra faptului că proprietăţile proiective ale figurilor sînt cu totul deosebite de proprietăţile lor metrice, că ele nu sînt legate de lungimea segmentelor, nici de arii, ca de pildă în teorema lui Pitagora, nici de unghiuri, ca în teoremele despre asemănări, deoarece aceste mărimi nu se păstrează prin proiecţie. El a pus accentul pe alte mărimi ce se folosesc pentru exprimarea proprietăţilor proiective. Printre acestea, un rol de seamă îl are *raportul anarmonic* sau *biraportul* dintre patru puncte coliniare, deoarece mărimea lui rămîne neschimbată în orice transformare proiectivă (101). *Tratatul despre proprietăţile proiective ale figurilor* a plăcut multor geometri şi pentru faptul că ei au găsit în acesta o revenire la metodele sintetice ale geometriei pure, „eliberată de hieroglifele analizei". Căci, aşa cum fusese ea prezentată de Euclid, Arhimede şi alţi geometri din antichitate, geometria se baza pe raţionamente directe impuse de figurile respective, şi independente de alegerea unui sistem de coordonate, cu alte cuvinte, fără intervenţiile, străine de obiect, ale algebrei sau analizei.

Un adept priceput şi plin de zel al noii geometrii a fost Jacob Steiner (102). În 1832 a publicat lucrarea *Dezvoltarea sistematică a interdependenţei configuraţiilor geometrice*, în care se găsesc studii despre curbe şi suprafeţe cercetate prin transformări proiective. El a predat un curs de geometrie proiectivă la Universitatea din Berlin, însă acesta a fost publicat postum, în 1867.

Un alt entuziast cercetător a fost M. Chasles (1793 — — 1880). În *Privire istorică asupra originii şi dezvoltării metodelor geometrice*, tipărită la Paris în 1837, a pus din nou în evidenţă şi a insistat asupra deosebirilor dintre proprietăţile metrice şi cele proiective: „Figurile pe care le consideră geometria au între ele două feluri de relaţii: unele privind formele şi poziţia lor, numite relaţii descriptive, şi altele cu privire la mărimile lor, numite relaţii metrice... Aceste două feluri de proprietăţi pot rezolva un mare număr de probleme. Dar uneori este folositor şi adesea necesar de a le considera independent unele de altele". Totodată, el explică riguros rolul esenţial al transformărilor proiective în însăşi dezvoltarea obiectului: „Considerînd o figură oarecare din spaţiu şi o proprietate oarecare a ei, dacă aplicăm acestei figuri unul dintre modurile de transformare (proiectivă) şi urmărim diferitele modificări sau transformări ale teoremei ce exprimă acea proprietate, se obţine o nouă figură şi o proprietate a acestei figuri ce va corespunde primei... Acest mijloc de care dispune geometria recentă permite să se înmulţească la infinit proprietăţile geometrice". În 1852, M. Chasles a publicat *Tratatul de geometrie superioară*, curs pe care l-a predat la Sorbona din 1846. Acest tratat a avut în Franţa o influenţă la fel de mare asupra dezvoltării geometriei proiective, ca în Germania cursul lui Steiner.

Aşadar, după ce geometria a trecut de la metoda sintetică, introdusă de matematicienii greci, la cea analitică, propusă de matematicienii secolelor XVII şi XVIII, în secolul al XIX-lea asistăm la o renaştere a geometriei sintetice, însă deosebită de cea de odinioară. În adevăr, în această fază modernă, geometria apare despărţită în *geometria euclidiană-metrică* şi *geometria proiectivă*. Geometria proiectivă se considera ne-*metrică*, pentru că relaţiile metrice nu sînt proiective, deşi nimeni nu pătrunsese încă în natura

intimă a acestei probleme, ca să poată preciza ce se înțelege prin denumirea de „ne-metrică", ținînd seamă că în expresia biraportului, mărime fundamentală a geometriei proiective (101) intervine totuși noțiunea metrică de distanță, atunci cînd se exprimă lungimile segmentelor care formează biraportul dintre patru puncte coliniare.

Separarea definitivă și totală dintre aceste geometrii a fost însă realizată de geometrul german Christian Staudt (1798 — 1867) în 1847, în cartea tipărită la Nürnberg cu titlul: *Geometria de poziție*, o altă denumire dată geometriei proiective. El a stabilit aici axiomele geometriei proiective și a arătat cum poate fi definit biraportul dintre patru puncte coliniare, independent de orice considerații metrice, pornind numai de la noțiuni proiective. În felul acesta, *noțiunea de biraport* capătă, în geometria proiectivă, sensul și funcția pe care le are *noțiunea de distanță* în geometria euclidiană. Din această cauză, Staudt nici nu a mai folosit numirea de *biraport*, înlocuind-o cu numirea de *cuaternă ordonată* sau, mai pe scurt, *zar*. El a stabilit regulile de calcul cu aceste cuaterne care, fără a fi de natură algebrică, sînt asemănătoare acestuia. Chr. Staudt a întrebuințat numai metode sintetice — pure —, iar titlul operei sale, *Geometria de poziție*, ținea să specifice faptul că proprietățile proiective ale figurilor geometrice reprezintă corespondențe legate numai de *pozițiile figurilor* unele față de altele, independent de orice considerații metrice sau de formule numerice.

Dar iluzia acestei definitive despărțiri a durat numai 10 ani! În 1859, matematicianul englez Arthur Cayley (1821 — — 1895) a spulberat-o, stabilind o metodă care aducea geometria metrică în domeniul geometriei proiective. Totodată el a minimalizat și importanța ce se dădea separării geometriei sintetice de cea analitică, arătînd că această deosebire nu este *esențială*, dat fiind că se discută *aceleași probleme* în limbaj diferit, fiecare dintre aceste limbaje avînd avantaje proprii, demne de a fi luate în considerație. Însă atacul contra „puriștilor" sau „sinteticilor" nu a fost inițiat de Cayley, el a existat chiar de la apariția „obiectului". Dealtfel, însuși Poncelet recunoștea că „geometria analitică oferă mijloace generale și uniforme". Așa că, în timp ce unii geometri se entuziasmau de reînvierea raționamentului

geometric pur, a metodei sintetice, care permitea fructificarea intuiției spațiale, și se declarau „puriști", alții considerau că metodele analitice ofereau posibilitatea de a adăuga noi interpretări, mai adînci, proprietăților geometrice proiective stabilite pe cale sintetică. Astfel, matematicianul german A. F. Möbius (1790 — 1868) a introdus noțiunea de *coordonate proiective*, definind, pentru prima oară, un sistem de coordonate omogene prin care a putut include în cercetările geometrice și elementele de la infinit. În cartea sa, apărută în 1827, *Calculul baricentric*, numire folosită de el pentru coordonatele omogene, se găsesc primele cercetări sistematice ale planului și spațiului proiectiv, adică ale planului și spațiului euclidian completat cu elementele de la infinit. Tot în această lucrare a fost studiat *biraportul* — numire introdusă chiar de el — și s-a pus în evidență importanța coliniației în corespondența proiectivă demonstrînd analitic, invarianța biraportului. Coordonatele baricentrice sau omogene pot fi considerate ca un sistem particular de coordonate proiective. Un an mai tîrziu a apărut primul volum din *Cercetări de geometrie analitică* al lui J. Plücker (1801 — 1868), iar în 1831 cel de-al doilea volum. Titlul nu ne lasă să bănuim decît vag că aceste cărți cuprind, într-o formă mai amplă, cercetările începute de Möbius asupra geometriei proiective. J. Plücker a generalizat coordonatele omogene ale lui Möbius, folosind chiar coordonatele proiective, pe care le-a numit liniare. Cu ajutorul lor a studiat, din punct de vedere proiectiv, proprietățile curbelor și ale suprafețelor algebrice ; tot Plücker a dat o formă generală altei noțiuni fundamentale, anume principiului de dualitate (103).

Așadar, înspre sfîrșitul primei jumătăți a secolului al XIX-lea, geometria proiectivă se dezvolta pe două căi diferite, una sintetică, condusă de Chasles și Steiner, cealaltă analitică, dirijată de Möbius și Plücker, fiecare tinzînd să-și păstreze independența și caracterele lor specifice și fără ca vreuna dintre părți să aibă motive de a se considera superioară, celeilalte. Dar, în 1859, A. Cayley (104), pe atunci avocat în Londra, a dovedit, fără drept de apel, superioritatea metodei analitice în cercetările de geometrie proiectivă. El a reușit să formuleze, analitic, o *definiție proiectivă a distanței dintre două puncte*, folosind în acest scop invarianța proiec-

Evariste Galois

tivă a raportului anarmonic dintre patru puncte coliniare, dintre care două sînt punctele date, iar celelalte două punctele de intersecție ale dreptei ce le unește cu o anumită conică (105). Prin această definiție, metrica euclidiană apărea ca un caz particular al metricii proiective și, prin urmare, întreaga geometrie euclidiană putea fi înglobată în geometria proiectivă. În culmea entuziasmului, A. Cayley își încheie articolul său, al șaselea dintre cele nouă „Memorii despre forme", cu cuvintele: „Geometria metrică apare acum ca o parte a geometriei descriptive, iar geometria descriptivă este singura geometrie". Cayley folosea denumirea de geometrie descriptivă pentru geometria proiectivă. Această lucrare a lui Cayley a fost tipărită cu un an mai înainte de a începe publicarea scrisorilor lui Gauss, scrisori care aveau să atragă atenția geometrilor asupra postulatului paralelelor și al geometriilor neeuclidiene.

Făcînd acest pas către unificarea a două ramuri diferite ale geometriei, Cayley nu bănuia că deschidea un drum ce va fi în curînd urmat și de alți geometri. Dar acest drum nu putea fi străbătut fără ajutorul algebrei. De aceea, mai înainte de a-l prezenta, trebuie cunoscute problemele ce fră-

mîntau pe algebriștii veacului al XIX-lea. Acestea erau legate de rezolvarea prin radicali a ecuațiilor algebrice de gradul V și mai mare.

În anul 1846, J. Liouville (1809 – 1882) publicase o lucrare a lui Evariste Galois (1811 – 1832) rămasă, după ce autorul fusese omorît pe neașteptate într-un duel, timp de 14 ani în manuscris, anume: *Memoriu asupra condițiilor de rezolvare a ecuațiilor prin radicali*. Se arăta în acest memoriu că proprietățile unei ecuații algebrice sînt legate de structura unui anumit grup de substituții și apoi se dezvolta teoria generală a grupurilor (106).

Noțiunea de grup, introdusă tot de Galois, din 1830, se definește astfel:

Fiind dată o mulțime nevidă M de elemente distincte $x, y, z...$, în număr finit sau infinit, și o operație $\top$, care poate fi aritmetică, geometrică sau chiar nedefinită, dar astfel ca prin ea să se poată asocia oricăror două elemente $x, y \in M$ un alt element $z \in M$, mulțimea M formează un grup dacă sînt îndeplinite condițiile:

1°. Pentru orice $x, y, \in M$ să existe un $z \in M$ astfel că:

$$x \top y = z;$$

2°. Operația să fie asociativă, adică pentru $x, y, z \in M$:

$$x \top (y \top z) = (x \top y) \top z;$$

3°. Să existe un *element neutru* e, numit și *unitate*, astfel că pentru orice $x \in M$ să avem:

$$x \top e = e \top x = x;$$

4°. Fiecare element $x \in M$ să aibă un *element invers* $x^{-1} \in M$, numit și *simetric*, astfel ca:

$$x \top x^{-1} = x^{-1} \top x = e.$$

Dacă există relația:

$$x \top y = y \top x,$$

atunci grupul se numește *comutativ* sau *abelian*. Grupul astfel definit este un *grup abstract*, fiindcă elementele mulțimii M nu sînt definite individual printr-o construcție sau convenție, ci depind de structura grupului. Teoria grupurilor

Augustin Cauchy

a fost dezvoltată prin lucrările lui A. L. Cauchy (1789 — — 1857), ale lui A. Cayley, care a dat, dealtfel, și prima definiție a grupului abstract (1854) și a arătat că el este *izomorf*[1] cu un grup de permutări.

Dar importanța teoriei grupurilor prin aplicațiile ei în toate domeniile matematicii nu a fost recunoscută decît după ce ea a fost dezvoltată și comentată de savantul francez C. Jordan (1838 — 1922) în cursurile ce le-a ținut în jurul anului 1870 la Sorbona, cursuri ce au fost tipărite în acel an în volumul *Tratat despre substituții*. Aceste cursuri au fost audiate și de doi tineri matematicieni Felix Klein (1849 — 1925) și Sophus Lie (1842 — 1899) și ei au găsit împreună,

[1] Două grupuri abstracte se numesc *izomorfe* dacă între elementele lor se poate stabili o corespondență biunivocă în așa fel ca imaginea compunerii a două elemente arbitrare ale unui grup să coincidă cu compunerea imaginilor elementelor corespunzătoare în celălalt grup.

Felix Klein

în acele probleme expuse de C. Jordan, elementele de bază pe care fiecare dintre ei a clădit o „Teorie a grupurilor de transformări", teorie ce a găsit ulterior largi și variate aplicații.

Felix Klein a studiat la Universitatea din Bonn și a fost elevul lui J. Plücker. Desigur că în centrul preocupărilor sale erau problemele de geometrie proiectivă, de care se ocupase și Plücker, dar la acestea el a mai adăugat și altele asupra geometriilor neeuclidiene, discutate pe atunci cu multă aprindere. În 1868 apăruse doar lucrarea lui Beltrami, ce punea pentru prima oară în evidență că cele două geometrii neeuclidiene, a lui Bolyai-Lobacevski și a lui Riemann, *erau de aceeași natură*, ele fiind echivalente, fiecare în parte, cu o anumită geometrie de pe o suprafață de *curbură totală constantă*: *pseudosfera*, în primul caz, și *sfera*, în cel de-al doilea. Ascultînd cursul profesorului Jordan despre aplicarea teoriei lui Galois la rezolvarea ecuațiilor, Felix Klein a intuit paralelismul dintre teoria substituțiilor algebrice și teoria transformărilor geometrice. Se știe că transformările geometrice, de pildă, acelea ale schimbării axelor de coordonate, erau folosite cu succes în punerea în evidență a anumitor

proprietăți ale curbelor și suprafețelor. Aceasta datorită faptului că, aplicîndu-le, rezulta o anumită expresie analitică ce rămînea *invariantă* în cursul acestor transformări. A. Cayley și J. J. Sylvester sînt creatorii teoriei *invarianților algebrici*, obținuți prin acest procedeu. Ei au publicat, începînd din 1845 (Cayley) și din 1851 (Sylvester) mai multe lucrări, stabilind metode generale care să permită determinarea expresiilor matematice ce rămîn independente de sistemul de coordonate folosit. Din grupul de lucrări, intitulat de Cayley *Despre formă*, face parte și faimosul său articol din 1859 cu privire la definirea *distanței proiective* ca un *invariant*.

Cunoscînd toate aceste lucrări, Felix Klein a găsit că transformările proiective pot fi un ajutor prețios în problema *unificării* dintre geometria proiectivă și geometriile neeuclidiene. Mai întîi, Felix Klein a observat că poate fi stabilită o strînsă legătură între geometria proiectivă și geometriile neeuclidiene, deoarece se poate demonstra că și geometria proiectivă este independentă de postulatul paralelelor. Apoi, folosind noțiunea de distanță proiectivă introdusă de A. Cayley, a pus în evidență natura proiectivă a geometriilor neeuclidiene, arătînd că toate trei geometriile plane : geometria lui Euclid, geometria lui Bolyai-Lobacevski și geometria lui Riemann sînt cazuri particulare ale metricii proiective a lui Cayley. Cu alte cuvinte, el a arătat că nu pot exista alte geometrii proiective de curbură constantă decît acestea trei și că, în felul acesta, aceste trei geometrii se definesc prin cu totul altfel de considerații decît acelea prin care au fost introduse și dîndu-le chiar denumirile : geometrie parabolică, respectiv hiperbolică și eliptică.

Felix Klein a expus aceste idei într-un articol publicat în 1871, avînd ca titlu : „Asupra așa-numitelor geometrii neeuclidiene", din care extragem următorul fragment semnificativ : „Necesitatea de a face intuitive speculațiile foarte abstracte, care au condus la formularea celor trei feluri de geometrii (cea euclidiană și cele două neeuclidiene), au dus la căutarea unor exemple de determinări metrice care pot fi concepute ca modele ale numitelor geometrii și care pun în evidență, în același timp, coerența internă a fiecăreia în parte..." Și dacă Beltrami și Riemann au adus ca modele pentru geometriile neeuclidiene plane, suprafețe din spațiul

euclidian avînd curbura constantă (pseudosfera și sfera), ideea originală a lui Klein a fost aceea că a găsit ca model pentru planul lui Bolyai-Lobacevski o parte a planului euclidian și anume *interiorul unui cerc.*

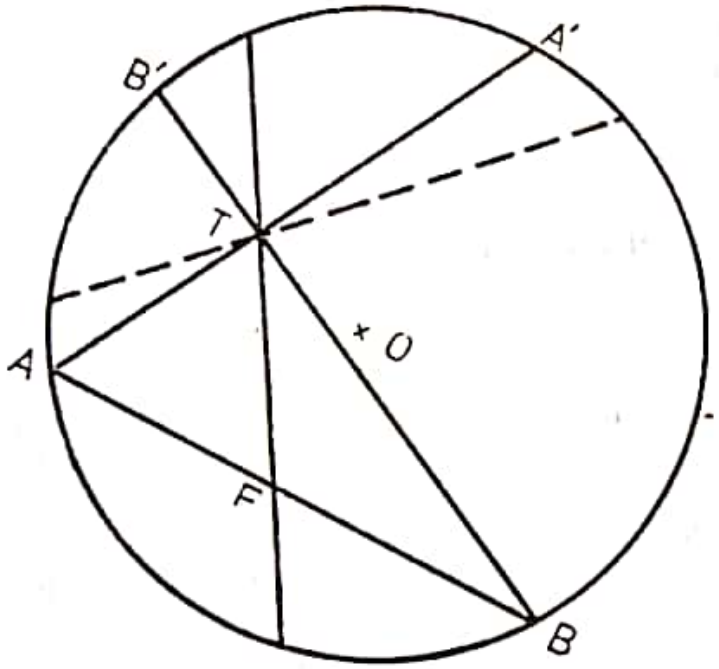


Fig. 20

Fie cercul cu centrul în O (fig. 20) și în el să numim drepte toate coardele lui. Fie AB una dintre aceste coarde. Deși *aparent* această coardă pare un segment finit de dreaptă, după convenția stabilită, ea este o dreaptă *nelimitată*, căci dacă din planul cercului este exclusă marginea lui, punctele A și B nu pot fi atinse, ci doar se poate ajunge *oricît de aproape de ele.* Fie T un punct oarecare din interiorul cercului. Prin el pot fi duse coarde ca TF, care întîlnesc coarda AB, dar și o infinitate de coarde care *nu întîlnesc* coarda AB. Acestea se află situate în interiorul unghiului format de coardele limită TA și TB, care nici ele nu întîlnesc coarda AB, deoarece punctele A și B sînt pe cerc, *iar cercul nu face parte din planul considerat.*

Iată dar că ne găsim în condițiile axiomelor lui Bolyai-Lobacevski. Pe de o parte, sînt respectate toate condițiile geometriei euclidiene și, pe de alta, se verifică și axioma paralelelor: printr-un punct exterior unei drepte se pot duce două paralele și o infinitate de drepte ce nu întîlnesc dreapta dată. Rămîne numai să se stabilească cum se poate

măsura distanța dintre două puncte ale acestui plan, adică cum se concepe *mișcarea* (107). În această privință, Felix Klein a avut o idee fericită, aceea de a clarifica noțiunea de măsură proiectivă a lui Cayley și de a numi *mișcare* orice

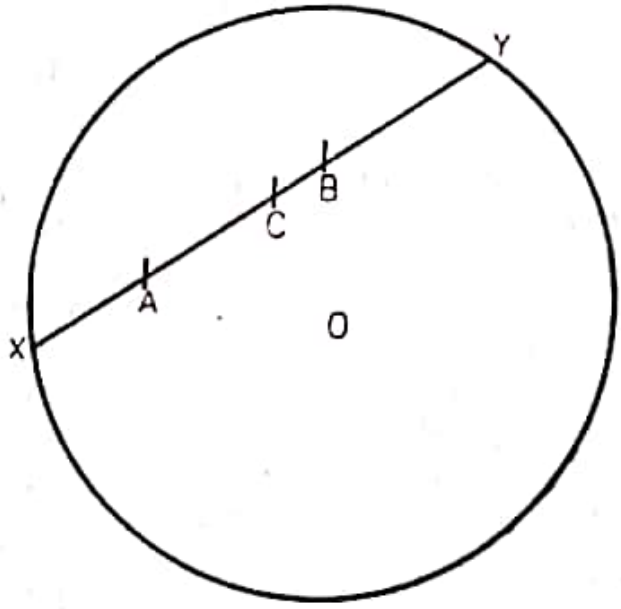


Fig. 21

transformare a cercului care transformă dreptele (coardele) în drepte, punctele din interiorul cercului în puncte din interiorul cercului transformat și punctele de pe conturul cercului în puncte de pe conturul noului cerc ; altfel spus, o mișcare transformă cercul în el însuși. O asemenea transformare se numește o *transformare proiectivă*, caracteristica ei principală fiind, după cum am văzut, păstrarea raportului anarmonic dintre patru puncte coliniare. Or, în felul acesta se introduce distanța proiectivă formulată de Cayley : Fie cercul O și punctele interioare A și B (fig.21). Unindu-le printr-o dreaptă (coardă), această coardă prelungită determină punctele X, Y de pe cerc. Raportul anarmonic $(ABXY)$ (sau $AX/BX : AY/BY$) definește distanța dintre A și B :

$$AB = \frac{k}{2} \ln \left(\frac{AX}{BX} : \frac{AY}{BY} \right).$$

Definită astfel, Klein dovedește că distanța proiectivă verifică cele două condiții satisfăcute de distanța euclidiană : 1) este invariantă la orice deplasare și 2) verifică proprietatea de aditivitate.

În adevăr, dacă punctul C se află între A și B, avem :

$$AC = \frac{k}{2} \ln (ACXY) \quad \text{și} \quad CB = \frac{k}{2} \ln (CBXY),$$

de unde rezultă (108) :

$$AB = AC + CB.$$

Analog se măsoară unghiurile și ariile. De aici rezultă că orice teoremă din geometria plană a lui Bolyai-Lobacevski are o teoremă corespunzătoare în geometria euclidiană din interiorul cercului și, invers, orice teoremă euclidiană se poate traduce într-o teoremă din geometria neeuclidiană.

Așadar, modelul imaginat de Klein pentru geometria lui Bolyai-Lobacevski este perfect și arată că ea este tot așa de logică cum este și cea euclidiană, căci orice contradicție s-ar ivi în geometria neeuclidiană ar implica una analoagă în geometria euclidiană. Mai mult decît atît, Felix Klein a reușit să dea, în acest fel, și modelul pentru geome-

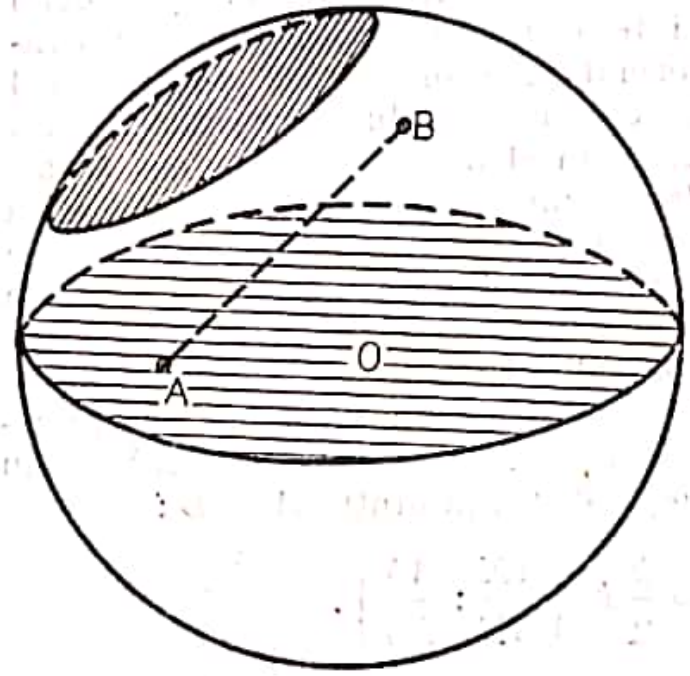


Fig. 22

tria neeuclidiană a lui Bolyai-Lobacevski în spațiu. Acesta este interiorul unei sfere : dreptelor le corespund coardele din sferă, planelor le corespund discurile de secțiune ale

sferei, din care, ca și la coarde, sînt excluse marginile (adică extremitățile coardelor sau cercurile situate pe suprafața sferei) (fig. 22). Mișcarea se definește tot ca transformarea proiectivă ce transformă sfera plină în ea însăși, coardele în coarde, planele în plane. Prin acest model s-a stabilit și prima demonstrație a necontradicției geometriei neeuclidiene în spațiu (109).

Legătura pe care Felix Klein a stabilit-o între geometria proiectivă și geometriile neeuclidiene a fost numai primul pas către *unificarea mullor ramuri ale geometrici*, care, după cum va observa chiar el, „cu toate că este una în esență, ea s-a despărțit, din cauza dezvoltării rapide, în mai multe discipline aproape separate". Pasul decisiv înspre unificare a fost făcut în 1872, cînd a expus punctul său de vedere în „Programul de la Erlangen". După cum o afirmă el însuși, acest punct de vedere i-a fost inspirat de *teoria substituțiilor* a lui C. Jordan. Anume, urmărind teoria lui Galois, el a înțeles că locul substituțiilor algebrice poate fi luat de transformările geometrice, deoarece formulele prin care se exprimă trecerea de la un sistem de coordonate la altul formează un grup. Ținînd seama, pe de o parte, de proprietatea esențială a grupurilor de substituții, anume că prin două substituții succesive se obține o nouă substituție a grupului și, pe de alta, că anumite proprietăți geometrice ale unui corp rămîn neschimbate la transformările de coordonate, Felix Klein a stabilit o nouă concepție, mai abstractă, a geometriei, pe care a expus-o într-o conferință intitulată: „Considerații comparative asupra cercetărilor matematice moderne", conferință cu care a inaugurat cursul ce urma să-l predea la Universitatea din Erlangen, unde fusese numit docent, în 1872.

Noutatea și ingeniozitatea ideilor cuprinse în această conferință a făcut ca ea să treacă de îndată nu numai pragul sălii de curs, ci și granițele țării sale, fiind pretutindeni comentată sub denumirea de „Programul de la Erlangen", titlu care exprima oarecum intenția autorului de a programa numeroasele și diversele geometrii existente atunci, ca pe niște ramuri ale unui tot organic. După Descartes, care cu două secole mai înainte a unificat geometria cu algebra prin introducerea sistemului de coordonate, Felix Klein a făcut acum încă un pas spre desăvîrșirea acestei unificări dintre

algebră și geometrie, bazîndu-se pe *teoria grupurilor de transformări geometrice*, grupuri pe care el le-a numit și *grupuri de transformări ale spațiului*, deoarece : „transformările sînt totdeauna aplicate la totalitatea elementelor spațiului (110)".

Un exemplu de grup de transformări al spațiului este *mulțimea deplasărilor* ; ele păstrează distanțele dintre două puncte și unghiurile dintre două drepte, adică lasă neschimbate figurile din geometria euclidiană. Un grup mai general, care îl conține pe acesta ca pe un subgrup, este *grupul transformărilor proiective* sau *omografice*. Aceste transformări nu mai lasă invariantă distanța dintre două puncte și nici unghiul dintre două drepte, dar păstrează coliniaritatea punctelor, concurența dreptelor și biraportul a patru puncte coliniare, adică face să se corespundă reciproc punctele între ele și, de asemenea, dreptele. Un alt grup de transformări poate fi stabilit în așa fel ca să transforme cercurile în ele însele, coardele în coarde și punctele în puncte. El intervine, după cum s-a văzut mai înainte, în interpretarea geometriei lui Bolyai-Lobacevski.

Felix Klein s-a bazat pe aceste observații ca să considere că *structura unei geometrii înseamnă structura unui anumit grup de transformări*. Astfel, *geometria euclidiană* este studiul invarianților metrici caracteristici *grupului de deplasări*, iar *geometria proiectivă* este studiul invarianților *grupului proiectiv* etc. (111). Un asemenea grup de transformări nu este însă legat de numărul 3 corespunzător numărului coordonatelor unui punct din spațiul nostru fizic.

După cum am văzut, problema spațiului cu mai multe dimensiuni a fost pusă și mai înainte de Klein, anume în cazul spațiului n-dimensional de tip euclidian, de către A. Cayley, iar pentru spațiul n-dimensional curb, de către B. Riemann. Din faptul că Felix Klein a dat un nou înțeles cuvîntului *geometrie*, astfel ca, din știință a figurilor din spațiu, să însemne știință a unui spațiu în care figurile au numai *anumite proprietăți*, acelea arătate de *invarianții* unui grup de transformări, rezultă în mod necesar că Felix Klein trebuia să se fi preocupat și de această problemă : „Să facem acum abstracție de figura materială care, din punct de vedere matematic, nu-i esențială și să nu considerăm spațiul decît ca o multiplicitate cu mai multe dimensiuni, așa cum, de pildă, referindu-ne la reprezentarea obișnuită a punctului

ca element al spațiului, multiplicitatea are trei dimensiuni. Prin analogie cu transformările spațiului, putem vorbi de transformările multiplicității, ele formează, de asemenea grupuri... Ca generalizare a geometriei, se pune astfel următoarea problemă generală: Fiind dată o multiplicitate și un grup de transformări al acestei multiplicități, să se studieze elementele din punct de vedere al proprietăților care nu se schimbă prin transformările grupului (112)".

Din multe puncte de vedere „Programul de la Erlangen" apare ca o tentativă îndrăzneață. Mai întîi că a uzurpat locul deținut de peste 2 000 de ani de *geometria euclidiană*, ca să-l ofere *geometriei proiective*. „Metoda proiectivă cuprinde acum *Geometria* întreagă", se afirmă chiar din primele rînduri ale lucrării. Apoi se introduce un alt punct de vedere asupra naturii obiectului geometriei și, prin aceasta, anume prin caracterizarea ei cu ajutorul invarianților unui grup de transformări, unifică multe dintre geometriile noi, care-și afirmau atunci existența. De exemplu, se reușește să se integreze în același cadru geometriile euclidiene, neeuclidiene și geometria proiectivă, ultima cuprinzîndu-le pe toate celelalte. În plus, această nouă concepție a geometriei conduce la un nivel mai înalt de abstractizare a însăși noțiunii de spațiu, care se desprinde complet de spațiul fizic real în care trăim și gîndim.

Prin aceste, și alte, schimbări surprinzătoare, Felix Klein a pus matematicienilor probleme noi care se cereau dezlegate.

FAȚĂ-N FAȚĂ CU REALITATEA

„Se poate întîmpla, criza non-euclidianului ne-a dovedit-o, că tocmai curentul care împinge cunoașterea înainte să descopere și să ne arate baza pe care se sprijină ea."

F. Gonseth[1]

Dacă geometriile neeuclidiene au nimicit absolutismul geometriei euclidiene și au făcut din ea un caz particular al lor, „Programul de la Erlangen" a conferit geometriei proiective rolul de geometrie principală, reducînd la cazuri particulare ale ei nu numai pe acestea trei, dar și încă multe altele. Această ultimă uzurpare de prioritate se datorește definiției pe care Felix Klein a dat-o geometriei, considerînd-o ca studiul invarianților unui grup de transformări ale spațiului. Așa fiind, grupurile de transformări corespunzătoare, respectiv, geometriei euclidiene, neeuclidiene, afine, centro-afine (111) sînt subgrupuri ale grupului proiectiv. Îndată după ce au fost puse aceste probleme, ele au interesat și au continuat să intereseze pe mulți matematicieni, astfel că pînă astăzi revistele matematice cuprind multe articole legate de acest subiect (113).

Dar, spre deosebire de Cayley, care privea geometria proiectivă ca o barieră dincolo de care nu mai exista nimic, declarînd că „geometria proiectivă este întreaga geometrie", Felix Klein și alți cercetători nu s-au oprit la această supremație, ci au continuat cercetările, descoperind și alte grupuri de transformări continue mai generale. În consecință, ei au lărgit astfel orizontul geometriei. De exemplu, Felix Klein și Sophus Lie, prieteni din timpul cînd au audiat cursul lui Jordan, au studiat proprietățile grupului transformărilor de contact (114).

---

[1] **Gonseth, Ferdinand (n. 1890), matematician și filozof elvețian.**

Deosebit de atrăgătoare şi bogată în rezultate s-a arătat a fi transformarea bicontinuă şi biunivocă ; geometria corespunzătoare acestui grup se numeşte *topologie*. Observînd că proprietăţile ce rămîn neschimbate la transformările bicontinue se referă la natura intimă a unei figuri geometrice, intervenind — de pildă — vecinătatea, contactul etc., Lobacevski a notat următoarele : „Contactul este o proprietate distinctivă a corpurilor“ (115).

Există însă şi geometrii care nu s-au putut încadra de la început în schema „Programului de la Erlangen“, adică nu s-au putut stabili imediat grupurile de transformări proprii lor. Astfel este cazul geometriilor riemanniene, definite prin elementul liniar ds^2 dintre două puncte infinit vecine. Într-un mod vag, considerînd doar o anumită latură a problemei, s-ar putea explica aceasta ţinînd seama că geometria euclidiană, precum şi geometriile neeuclidiene sau geometria proiectivă, consideră doar *spaţii omogene de curbură constantă* şi, în asemenea spaţii, punctele se pot mişca liber dintr-un loc în altul, fapt ce se exprimă analitic printr-o transformare de coordonate care, după cum am văzut, formează grupul caracteristic geometriei respective. Însă

Alexandru Myller

Octav Mayer

în geometriile riemanniene spaţiile au, obişnuit, curbura variabilă şi din această cauză nu este permisă mişcarea liberă a unui punct, dintr-un loc în altul. În acest caz, nu se mai poate defini un grup de transformări. Problema a fost totuşi rezolvată prin introducerea unei noţiuni noi, aceea de *spaţiu cu conexiune* care a condus la stabilirea unor anumite transformări infinitezimale (116).

Într-o prea frumoasă cărticică *Crezul meu? matematica*, apărută în 1970 în traducere românească, cunoscutul matematician englez G. H. Hardy scrie : „Există ştiinţa geometriei pure care include mai multe geometrii : geometria proiectivă, geometria euclidiană, geometria neeuclidiană etc. Fiecare dintre aceste geometrii este un model, un model construit din idei şi urmează să fie apreciat după interesul şi frumuseţea pe care o prezintă modelul ei specific. Acest model este o reprezentare sau o imagine, produs comun al multor operaţii, a unei acţiuni făcute în realitatea matematică. Există un lucru pe care geometriile pure nu-l reprezintă şi acest lucru este *realitatea* spaţio-temporală a lumii

fizice. Cutremurele de pămînt și eclipsele nu sînt concepte matematice".

Aceste observații ale lui Hardy merită să fie considerate mai îndeaproape, pentru că, prin trecerea treptată către un nivel tot mai înalt de abstractizare, s-a format și o nouă concepție despre relația dintre geometrie și realitatea spațială. Trebuie să amintim că atît definițiile, cît și axiomele geometriei euclidiene sînt abstractizări care se bazează pe concluziile trase în mod intuitiv din observațiile și experiențele făcute în spațiul real, înconjurător. Din această cauză, toate teoremele din geometria euclidiană, stabilite logic din aceste definiții și axiome, sînt în concordanță cu realitatea imediat înconjurătoare. Apariția și dezvoltarea geometriilor neeuclidiene nu au negat existența spațiului real, dar i-au făcut pe unii matematicieni să se întrebe dacă spațiul fizic nu ar fi diferit de spațiul euclidian, iar dacă ar fi așa, atunci care-i geometria spațiului în care ne aflăm ? Se cunosc încercările pe care le-au făcut Gauss, pe de o parte, și Lobacevski, pe de alta, ca să determine, prin măsurători la scară foarte mare, dacă, în aceste condiții, mai rămîne valabilă geometria euclidiană (117).

Abia prin „Programul de la Erlangen" noțiunea unică de spațiu real și absolut, spațiu ce se confunda cu acela al geometriei euclidiene, sau poate acela al geometriei neeuclidiene, a dispărut dintr-o dată, fiind înlocuită cu noțiunea unor mulțimi de spații abstracte, fiecare corespunzînd unei anumite geometrii. Ca studiu al structurii unui grup algebric și al invarianților lui, geometria nu mai este legată de spațiul real. Chiar și intuiția spațială este eliminată, fiindcă spațiul se reduce la numere (coordonatele punctului) și la anumiți invarianți (expresii algebrice). „Spațiul este aritmetizat!" a afirmat Felix Klein, iar Henri Poincaré descria : „Teoria grupurilor este întreaga matematică despuiată de materia sa și redusă la forma pură". Sau încă : „Matematicienii nu studiază obiectele, ci relațiile dintre obiecte ; lor le este indiferent dacă aceste obiecte se înlocuiesc unele cu altele, atita vreme cît relațiile dintre ele nu se schimbă (118)".

Toată agitația provocată de „Programul de la Erlangen" era privită cu neîncredere de mulți matematicieni. Ei considerau că această răsturnare de valori fusese făcută cam

pripit : geometria euclidiană își dovedise trăinicia și compatibilitatea mai bine de 2 000 de ani. De aceea, în 1822, atunci cînd Poncelet a prezentat actul de naștere al geometriei proiective, ea a fost recomandată ca o ramură a geometriei euclidiene ! Abia peste un sfert de veac, G. von Staudt a reușit să-i precizeze obiectul, despărțind proprietățile metrice de cele proiective. Dar, nici prin aceasta nu se întrevedea încă vreo tendință de răsturnare a prerogativelor, ci numai o mai largă independență între cele două domenii de cercetare. Lovitura s-a produs pe neașteptate, în 1872, cînd geometria proiectivă s-a arătat în stare să găsească modele proiective pentru celelalte geometrii, modele desigur atît de abstracte încît acestea nu mai aveau nici o legătură cu realitatea spațială din care izvorîseră noțiunile de bază ale geometriei euclidiene. Din acest impas nu exista decît o ieșire : aceea a unei analize critice, atente și temeinice a noțiunilor de bază ale geometriei proiective și ale posibilităților ei logice de a stabili relații de interdependență cu celelalte geometrii. Aceasta era calea către metoda axiomatică. Într-una din remarcabilele lucrări publicate de Ferdinand Gonseth, sub titlul *Fundamentele matematicilor* (1926), autorul observa : „Prin axiomatizare, gîndirea teoretică și-a afirmat caracterul ei teoretic, asigurîndu-și independența față de izvoarele intuitive și experimentale ale informației sale (119)".

Primul studiu sistematic asupra axiomatizării geometriei proiective a fost făcut de Moritz Pasch (1843—1930) și a apărut în 1882 sub titlul : *Prelegeri despre geometria modernă.* În prefața cărții, găsim: „În încercările ce au fost făcute pînă acum ca să se dea părților fundamentale ale geometriei o formă care să răspundă cerințelor devenite mai riguroase cu timpul, originea empirică a geometriei nu a fost pusă în valoare într-un mod cu totul decisiv... Au fost legate de geometrie tot felul de speculații ; succesul constant al aplicațiilor geometriei la științele naturale și în viața practică se datoresc în tot cazul faptului că la origine noțiunile geometrice corespundeau exact obiectelor empirice deși treptat au fost acoperite de noțiuni artificiale proprii să favorizeze dezvoltările teoretice."

În studiul său, M. Pasch pornește de la anumite noțiuni primare, nedefinite, și anumite *axiome*, legate de aceste

David Hilbert

noțiuni fără nici o demonstrație. Acestea formează *baza axiomatică* a geometriei ale cărei teoreme vor fi deduse, logic, numai din noțiunile primare și axiomele enunțate. Spre deosebire de Euclid, Pasch recunoștea pentru prima oară importanța deosebirii dintre o *definiție implicită* și alta *explicită*, definițiile implicite datorindu-se faptului că este imposibil să se precizeze toți termenii în mod explicit, fără a se recurge la un lanț infinit (120). El observa că : „Matematica pune în evidență relații între noțiuni matematice care ar trebui să corespundă faptelor din experiență, dar în marea lor majoritate acestea nu sînt împrumutate din experiență, ci demonstrate". De pildă, noțiunea de dreaptă nedefinită nu corespunde nici unei experiențe sensibile, căci experiența ne oferă numai noțiunea de *segment rectiliniu*.

Lucrarea lui Pasch a avut o mare influență asupra gîndirii axiomatice în geometrie și a fost urmată de alte studii importante (121). În fruntea lor însă se află *Despre bazele geometriei*, apărută în 1899 și scrisă de celebrul matematician David Hilbert (1862–1943). Lucrarea, devenită acum clasică, prezintă într-o formă matematică modernă întreaga geometrie elementară, complet abstractizată, sub formă

axiomatică (122). Ca să reușească cea mai perfectă abstractizare a noțiunilor geometrice, Hilbert a înlăturat orice semnificație intuitivă sau orice conținut experimental al elementelor (noțiuni și relații între ele), pe care le-a considerat *fundamentale* sau *primitive*. Acestea, enumerate fără nici un fel de definiție, sînt în număr de șase, din care *trei sînt noțiuni fundamentale: punct, dreaptă, plan*, iar restul de *trei sînt relații* între ele: *relația de incidență* (*legătură* sau *apartenență*), definită prin cuvîntul „*aparține*" (sau „*este situat pe*"), *relația de ordonare*, definită prin cuvîntul „*între*", și *relația de congruență*, exprimată prin cuvîntul „*congruent*" (sau „*egal*"). Se atrage atenția că dacă aceste cuvinte au vreun înțeles în viața de toate zilele, acesta trebuie exclus, fiindcă ele trebuie să-l aibă numai pe acel care rezultă din *axiomele* formulate de Hilbert și împărțite în următoarele cinci grupe:

I. Axiome de incidență:

1. Prin două puncte trece întotdeauna o dreaptă.
2. Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă.
3. Orice dreaptă conține cel puțin două puncte. Există trei puncte nesituate pe aceeași dreaptă.
4. Prin trei puncte nesituate pe aceeași dreaptă trece un plan. Orice plan conține cel puțin un punct.

. . . . . .

8. Există patru puncte nesituate în același plan.

II. Axiome de ordonare:

1. Dacă punctul B se găsește între A și C, atunci punctele A, B, C, sînt pe aceeași dreaptă, sînt distincte și B se găsește, de asemenea, între C și A.
2. Fiind date două puncte distincte A, B, există un punct C astfel încît B să se găsească între A și C.

. . . . . .

4. (Axioma lui *Pasch*): Fiind date trei puncte nesituate pe aceeași dreaptă A, B, C și o dreaptă d în planul lor ce nu trece prin nici unul dintre aceste puncte, dacă dreapta d trece printr-un punct situat între A și B, atunci ea trece cu siguranță printr-un punct situat între A și C sau printr-un punct situat între B și C.

III. Axiome de congruență :

1. Fiind dat un segment AB, o dreaptă d și un punct O pe dreapta d, există pe dreapta d exact două puncte P_1 și P_2, astfel încît să avem $OP_1 \equiv AB$, $OP_2 \equiv AB$. Punctul O se găsește între punctele P_1 și P_2.

2. Două segmente congruente cu al treilea sînt congruente între ele.

. . . . . .

5. Fiind date două triunghiuri ABC, A' B' C', din congruențele :

$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \quad AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C'$$

rezultă :

$$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'.$$

IV. Axiome de continuitate :

1. Axioma lui *Arhimede* (sau *axioma măsurii*) : Fie AB și CD două segmente arbitrare ; pe dreapta AB există un număr finit de puncte A_1, $A_2 \ldots A_n$ astfel că segmentele AA_1, $A_1A_2, \ldots A_{n-1}A_n$ sînt congruente cu segmentul CD și punctul B se află între A_{n-1} și A_n (123).

2. Axioma lui *Cantor-Dedekind* (sau *axioma de completitudine*) : Nu se pot adăuga puncte, drepte și plane noi, astfel încît axiomele precedente să fie verificate (124).

V. Axioma de paralelism (sau axioma lui *Playfair*) : Printr-un punct exterior unei drepte nu se poate duce mai mult de o paralelă la acea dreaptă.

Cele cinci grupe de axiome sînt acelea care dau înțeles precis celor șase noțiuni fundamentale ale geometriei și arată care sînt *toate proprietățile* pe baza cărora se va construi logic întreaga geometrie euclidiană. Pe seama acestor noțiuni sau obiecte fundamentale, introduse fără nici un fel de explicații și goale de orice înțeles, adică *fără ca să se știe de mai înainte de a fi formulate axiomele*, ce înseamnă un punct, o dreaptă sau un plan, Hilbert glumea astfel, într-o scrisoare adresată matematicianului G. Frege (1846–1925), binecunoscut prin lucrările sale despre fundamentarea logică a aritmeticii : „Dacă în locul punctelor mele aș considera un sistem oarecare de obiecte : dragoste, lege, hornar, și aș presupune ca elemente de legătură dintre ele tot axiomele mele, atunci toate teoremele geometriei ar fi valabile și

pentru ele, de pildă, teorema lui Pitagora. „O altă versiune a aceleiași butade, imaginată tot de Hilbert, este și următoarea: „Cuvintele *punct*, *dreaptă*, *plan*, se pot înlocui oricînd prin *masă*, *scaun*, *pahar*, fără ca prin aceasta să se schimbe ceva din geometria lui Euclid, dacă acestea sînt legate prin axiomele mele".

Examinînd aceste axiome, observăm că ele sînt în număr de 20. Aflăm astfel că Hibert a limitat la 20 numărul minim al propozițiilor cele mai simple, care să exprime adevăruri evidente fiecăruia, astfel încît acestea să nu mai aibă nevoie de nici o motivare, iar pe baza lor să se poată stabili, logic, toate cele aproape 500 de teoreme ale *Elementelor* lui Euclid, precum și cele ce ar putea fi deduse în viitor. Dar acesta este numai un răspuns la prima întrebare ce ne-ar fi venit în minte. Iată și alte întrebări, mai cutezătoare, la care răspunsurile nu se vor mai contura cu aceeași precizie și spontaneitate:

— De unde știm că aceste axiome sînt compatibile între ele și că, pornind de la acestea, nu se va întîmpla ca printre teoremele aflate să nu existe două *care să se contrazică*?

— De unde știm că aceste axiome sînt *independente* unele de altele și că nu cumva vreuna dintre ele ar fi o consecință logică a alteia, astfel încît numărul de 20 ar fi prea mare?

— De unde știm că numărul 20 nu este prea mic, adică aceste axiome suficiente pînă acum, pe măsură ce s-ar demonstrea anumite teoreme, nu se va simți nevoia de a se mai adăuga și altele, ce nu au fost prevăzute în lista de mai sus?

Aceste întrebări sînt cunoscute sub numele de *problema compatibilității* sau a *necontradicției*, *problema independenței* și *problema completitudinii*. Ele au preocupat îndelung nu numai pe Hilbert, dar și pe toți matematicienii, care și-au îndreptat cercetările înspre domeniul fundamentelor matematicii și nu sînt, pînă acum, pe deplin rezolvate. În privința compatibilității, David Hilbert se exprima astfel, într-unul din capitolele cărții sale *Bazele geometriei*, intitulat „Necontradicția axiomelor": „Axiomele celor cinci grupe de axiome, stabilite în capitolul I, nu se contrazic între ele, adică nu este posibil ca prin raționamente logice să deducem din ele un fapt care să contrazică una dintre axiomele

stabilite. Pentru a ne da seama de aceasta, vom forma din numerele reale un sistem de obiecte în care sînt satisfăcute toate axiomele celor cinci grupe." Ca să realizeze această idee, Hilbert a transferat problemele din geometria pură, sintetică, în geometria analitică, adică a înlocuit punctul geometric printr-o pereche de numere algebrice etc. Această înlocuire a domeniului geometriei prin domeniul numerelor reale l-a dus la concluzia: „Orice contradicție în sistemul celor cinci grupe de axiome ar trebui să se manifeste în aritmetica sistemului numerelor reale." Așadar, Hilbert *nu a demonstrat compatibilitatea* axiomelor sale, ci a redus-o la presupusa *necontradicție* a aritmeticii și a analizei, sau, cu alte cuvinte, am putea spune că el demonstrează necontradicția geometriei, *admițînd* că *aritmetica este necontradictorie* (125).

Despre *independența axiomei paralelelor*, D. Hilbert scria: „Aceasta se arată așa cum se știe, în modul cel mai simplu, astfel: Se aleg punctele, dreptele și planele geometriei obișnuite (carteziene) construite mai sus, în măsura în care ele sînt situate înăuntrul unei sfere solide"... Așadar, Hilbert a folosit modelul lui Klein pentru geometria neeuclidiană și a tras concluzia: „Deoarece posibilitatea geometriei obișnuite a fost demonstrată mai sus, de aici decurge și posibilitatea geometriei neeuclidiene". Pentru a stabili independența axiomei lui Arhimede, Hilbert a construit o „geometrie în care toate axiomele erau verificate, cu excepția acesteia". O asemenea geometrie se numește acum *ne-arhimediană*, și Hilbert are meritul de a fi dezvoltat astfel o teorie a proporțiilor și o teorie a ariilor independente de postulatul lui Arhimede. A treia problemă, aceea legată de condiția ca sistemul de axiome să fie complet, a încercat să fie rezolvată cu ajutorul unor modele diferite prin care să se poată interpreta întregul grup de axiome al sistemului. Asemenea modele *diferite*, prin care se interpretează *un același sistem de axiome*, în așa fel ca între elementele fundamentale ce caracterizează fiecare model să se poată stabili o *corespondență biunivocă*, cu păstrarea relațiilor fundamentale, se numesc *izomorfe*.

Lucrarea lui David Hilbert, *Bazele geometriei*, reprezintă mult mai mult decît prezentarea unui sistem adecvat de axiome corespunzător geometriei euclidiene. Dovedind în

Gheorghe Vrânceanu

parte compatibilitatea și independența axiomelor sale, el a inventat multe modele interesante ale diferitelor submulțimi extrase din sistemul complet de axiome, fapt care echivalează cu crearea unor noi sisteme geometrice. Am văzut, de pildă, cum se obține geometria ne-arhimediană ; tot așa, prin înlocuirea axiomei paralelelor prin : „Se pot duce cel puțin două drepte ce nu intersectează o dreaptă dată printr-un punct dat ce nu se află pe acea dreaptă", se obține geometria lui Bolyai-Lobacevski. H. Poincaré a imaginat un model, bazat pe acest sistem de axiome, pentru planul hiperbolic, la fel de consistent ca și planul euclidian (109).

Sub influența sistemului de axiome al lui Hilbert au fost imaginate și alte modele care au avut ca punct de plecare alte noțiuni primitive, definite de alte relații. Un exemplu este acel al matematicianului american O. Veblen, un altul aparține matematicianului român G. Vrănceanu.

Despre lucrarea lui David Hilbert, academicianul Simion Stoilov a scris, printre altele, următoarele (loc. cit. 1) : „Influența exercitată de *Grundlagen der Geometrie* asupra gîndirii axiomatice moderne a fost covîrșitoare. Și nu mă gîndesc aici la cercetările, de însemnătate mai mult filo-

Simion Stoilov

zofică, care au dus pe Hilbert și pe elevii săi la concepția formalistă a fundamentelor matematice, dar la *metodele axiomatice propriu-zis matematice*, care au pus stăpînire pe atîtea din domeniile cele mai importante ale științei noastre și care s-au dovedit adesea revelatoare și simplificatoare totodată... În acțiunea sa abstractă și generalizatoare, axiomatizarea adevărat profundă și adevărat utilă nu poate pierde din vedere fenomenul matematic de la care a plecat... gîndirea axiomatică a putut duce efectiv la măreţe înfăptuiri : o viziune armonioasă a realității matematice cu o pătrundere mai adîncă în esența ei... Oricît ar părea de depărtate regiunile în care se ridică abstracțiile axiomatice și oricît de independente de lumea în care trăim, axiomatica însăși ne arată că, conștienți sau nu, urmăm totuși linia impusă de această realitate".

FAȚĂ-N FAȚĂ CU ADEVĂRUL

„Toată tendința noastră de a cunoaște se îndreaptă spre valoarea de adevăr și toate cunoștințele sînt numai trepte de realizare a acestei valori".

Petre Andrei[1]

În 1899, David Hilbert se considera îndreptățit să creadă că odată cu *Bazele geometriei* a scris și ultimul capitol din aventura geometriilor neeuclidiene. Cartea lui, o reconstituire modernizată a *Elementelor* lui Euclid, reașeza, după 22 de veacuri de decantări și purificare, adevărurile fundamentale, pe baza cărora fuseseră demonstrate odinioară toate teoremele geometriei (126). Dar, ca și cum prin această *întoarcere la Elementele* lui Euclid s-ar fi declanșat implacabila fatalitate din epoca tragediilor grecești, furtuna dezlănțuită de analizarea lucrării a învăluit-o și pe ea în ceața incertitudinilor. S-a arătat anume că, nici *formalizarea* realizată de Hilbert, nu era în stare să stingă adevărul pur și absolut al geometriei, fiindcă oricît de perfecte erau formele golite de intuiție spațială ale noțiunilor fundamentale și oricît de bine gîndite erau axiomele ce indicau relațiile posibile între aceste forme, consistența edificiului geometric, adică necontradicția teoremelor sale, era garantată numai *relativ*: așa după cum consistența geometriilor neeuclidiene se baza pe aceea a geometriei euclidiene, consistența geometriei euclidiene se baza pe aceea a aritmeticii.

Însă nici în domeniul aritmeticii lucrurile nu erau pe deplin lămurite! Deși nimeni nu se îndoia de valabilitatea tautologiilor de forma $2 + 3 = 5$, sau a propozițiilor ce urmau logic din acestea (127), de prin a doua jumătate a secolului al XIX-lea, matematicienii au început să observe că în

[1] Andrei, Petre (1891—1917), sociolog și filozof român.

Leopold Kronecker

raționamentele din aritmetică și analiză se strecurară destule operații pur formale sau bazate pe intuiție, așadar complet lipsite de o serioasă motivare logică. Anumite încercări de axiomatizare a aritmeticii începuseră cu vreo două decenii mai înainte de a fi apărut *Bazele geometriei* și s-au continuat după apariția ei, dar rezultatele nu erau satisfăcătoare. De aceea, David Hilbert spera că va reuși să stabilească și necontradicția *Aritmeticii*, urmînd aceeași cale care îl dusese și la axiomatizarea geometriei. Numai că drumul nu mai era la fel de ușor. În articolul „Despre bazele logicii și ale aritmeticii" publicat în 1905, el explică mai întîi ce greutăți sînt de întîmpinat, apoi, după ce a cercetat critic rezultatele obținute de alți cercetători, a schițat și planul său de lucru: „Dificultățile întîlnite la fundamentarea aritmeticii sînt în parte, de fapt, de altă natură decît acelea care trebuie învinse la fundamentarea geometriei. Atunci cînd am examinat bazele geometriei, anumite dificultăți de natură pur aritmetică au putut fi lăsate deoparte; la fundamentarea aritmeticii, invocarea altei discipline fundamentale apare însă de nepermis. Dificultățile întîlnite la fundamentarea aritmeticii vor putea

apărea foarte clar, supunînd unei scurte discuții critice vederile anumitor cercetători. L. Kronecker a văzut, după cum se știe, în noțiunea de *număr întreg*, fundamentul propriu-zis al aritmeticii ; el și-a format părerea că numărul întreg există în realitate direct și nemijlocit, anume ca noțiune generală, și aceasta l-a împiedicat să-și dea seama că noțiunea de număr întreg are nevoie (și este susceptibilă) de fundamentare... H. Helmholtz reprezintă punctul de vedere al empiristului ; mi se pare însă că punctul de vedere al experienței pure este respins prin faptul că din experiență nu se poate deduce niciodată existența unui număr nedefinit de mare. Căci numărul lucrurilor care constituie obiectul experienței noastre, oricît ar fi de mare, rămîne sub o limită finită... Dintre învățații care au pătruns mai adînc în esența numărului întreg, menționez pe următorii : G. Frege își propune să fundamenteze legile aritmeticii prin intermediul logicii, aceasta fiind concepută în sensul tradițional (128)". Mai departe, Hilbert își exprimă părerile sale despre curentul *logicist* (creat de matematicienii care, împreună cu Frege, considerau că întreaga matematică putea fi redusă la logică, sau aritmetică, numai fiindcă, după cum am văzut, consistența celorlalte ramuri ale matematicilor se putea reduce la aceea a aritmeticii numerelor naturale sau la teoria mulțimilor) : „Aritmetica este considerată ca o parte a logicii și, de cele mai multe ori, la fundamentarea aritmeticii se admit ca premise conceptele fundamentale tradiționale ale logicii. Numai că, studiind cu atenție, observăm că în expunerea obișnuită a legilor logicii se întrebuințează anumite concepte fundamentale ale aritmeticii, de pildă conceptul de mulțime, în parte chiar și acela de număr, îndeosebi ca număr indicator. Ajungem astfel la o situație fără ieșire. De aceea, pentru evitarea paradoxurilor, este necesară o dezvoltare parțial concomitentă a legilor logicii și ale aritmeticii". Intenția lui Hilbert era să găsească mai întîi o bază axiomatică atît logicii, cît și aritmeticii. Apoi, urma să stabilească necontradicția aritmeticii, introducînd semne considerate ca forme ce se pot combina după anumite reguli corespunzătoare axiomelor, astfel ca teoremele să apară ca niște configurații de semne a căror succesiune poate fi urmărită. Prin astfel de metode se încerca să se descopere orice contradicție. Această lucrare nu l-a mulțumit însă

nici pe Hilbert și nici pe ceilalți matematicieni, fiindcă nici el, ca și cei dinaintea lui, nu a reușit să formuleze noțiunea de număr natural, fără a o presupune dată (129).

Timp de vreo 17 ani, Hilbert nu a mai publicat nimic în legătură cu problema axiomatizării deși studiile acestea erau continuate în școala pe care o formase la Göttingen, reprezentată prin Wilhelm Ackermann, Paul Bernays, Johann von Neumann ș.a. Abia între 1922 și 1928 au apărut o serie de lucrări legate de fundamentarea matematicii, de infinit și de teoria demonstrației matematice, numită acum *metamatematică*. Cuvîntul, azi cu o folosire foarte largă, a fost creat ca să se precizeze apariția unui capitol nou „pe lîngă matematică", dar, bineînțeles, „legat și în jurul matematicii", capitol impus tocmai de faptul că demonstrațiile se bazează pe un procedeu de formalizare a logicii și a aritmeticii. „Este necesar", scria Hilbert în 1925, în articolul intitulat „Despre infinit", „să formalizăm operațiile logice și chiar demonstrațiile matematice; aceasta cere o transpunere a relațiilor logice în formule astfel încît trebuie să adăugăm la semnele matematice și semne logice... În calculul logic noi posedăm un limbaj simbolic capabil de a prinde în formule propoziții matematice și de a exprima raționametul logic prin procese formale. Întocmai ca la trecerea de la aritmetica concretă la algebră, considerăm semnele și simbolurile de operație ale calculului logic desprinse de semnificația lor concretă. Prin aceasta căpătăm, în locul științei matematice concrete, comunicată prin limbajul obișnuit, un stoc de formule cu semne matematice și logice care iau naștere unele după altele, după anumite reguli."

Peste 3 ani, Hilbert va relua această problemă în *Fundamentele matematicii*, ducînd-o mai departe: „Ideea fundamentală a teoriei mele despre demonstrație nu este alta decît de a descrie activitatea intelectului nostru, de a accepta un protocol asupra regulilor, conform cărora gîndirea noastră procedează la fel. Gîndirea se desfășoară tocmai paralel cu vorbirea și scrierea, prin formare și juxtapunere de propoziții... demonstrația formalizată, ca și o cifră, este un obiect concret și perceptibil în ansamblu. Ea este, de la început și pînă la sfîrșit, comunicabilă." Hilbert a reușit astfel să stabilească o *metodă perfect formalizată* prin care se putea urmări desfășurarea raționamentului matematic. Comuni-

carea acestui rezultat urma însă să se facă *prin limbajul obişnuit* care se separa astfel de *formula matematică*, de matematica în sine. Însă acest *limbaj obişnuit*, care avea rolul de a *explica sau de a comenta formula*, de a constata dacă există sau nu o contradicţie în expresia ei, aparţinea *metamatematicii*, adică teoriei demonstraţiei (130).

Astfel, se părea că Hilbert a reuşit nu numai să stabilească consistenţa aritmeticii, dar şi independenţa axiomelor ei. Această iluzie a durat însă numai trei ani. În 1931 a apărut un articol al lui Kurt Gödel, intitulat: „Despre propoziţiile formal nedecidabile din *Principia mathematica* şi din sistemele înrudite", în care se dovedea că *este imposibil să existe un sistem complet formalizat* care să cuprindă întreaga aritmetică, pentru care să se poată demonstra consistenţa lui prin metode finite. Cu alte cuvinte, o demonstraţie metamatematică a necontradicţiei aritmeticii formalizate cerea mijloace de altă natură decît acelea folosite pentru stabilirea curentă a teoremelor. Mai mult, Kurt Gödel arăta că atît logicismul, cît şi orice sistem axiomatic sau de altă natură, care ar încerca să dezvolte aritmetica, este esenţial incomplet, adică se pot stabili propoziţii aritmetice noi, ce nu fac parte din sistemul dat, despre care nu se poate afirma *dacă sînt sau nu adevărate* fără să se introducă alte axiome, iar dacă se introduc alte axiome, faptul se repetă. Între 1934—1939, D. Hilbert şi elevul său P. Bernays au publicat o nouă ediţie, revăzută, a *Fundamentelor matematice*, în 2 volume, în care se ţine seamă de teorema lui Gödel, recunoscîndu-se că „nu se mai poate vorbi despre o teorie a demonstraţiei în sensul primitiv al punctului de vedere finitist".

Teorema lui Gödel a uluit prin conţinutul ei tot aşa de tare ca şi, cu un veac mai înainte, geometria lui Bolyai—Lobacevski, cu singura deosebire că, în răstimpul acestui veac, mijloacele de răspîndire a cunoştinţelor erau mai rapide şi că matematicienii se cam deprinseseră cu surprizele! Neaşteptată şi tulburătoare apărea concluzia ce se desprindea din teorema despre incompletitudinea oricărui sistem formal al aritmeticii, fie cel imaginat de logicişti, fie acela corespunzător axiomaticii lui Hilbert şi elevilor săi. Căci nimeni nu se mai îndoise pînă atunci că, *prin demonstraţie*, nu s-ar putea decide despre adevărul unei teoreme sau al aceleia care îl neagă! Gödel însă a găsit, cum o spune

singur: „o propoziţie care afirmă propria ei nedemonstrabilitate", adăugînd că „o astfel de propoziţie nu are în sine, contrar aparenţei, nimic dintr-un cerc vicios, fiindcă se afirmă mai întîi nedemonstrabilitatea unei formule complet determinate şi de-abia pe urmă (oarecum întîmplător) reiese că această formulă este tocmai aceea în care a fost exprimată ea însăşi". *Nedecibilitatea adevărului matematic*, exprimat într-un sistem formalizat, a arătat că fundamentele matematicii nu mai puteau fi îngrădite nici de logistică şi nici de axiomatică (ambele folosind logica formală ca mijloc de exprimare) şi că, pentru cercetarea şi lămurirea lor, trebuie să-şi spună cuvîntul şi *intuiţionismul*. Se ştie că între aceste trei şcoli principale, ce se ocupau de natura şi fundamentele matematicii (131), existau divergenţe. Chiar se critica faptul că logicismul şi formalismul restrînseseră în mod abuziv rolul intuiţiei (132), singura în stare să facă descoperiri.

L.E.J. Brouwer (1881—1966), conducătorul curentului intuiţionist, s-a exprimat astfel, în 1925, despre formalism: „Desigur că prin axiomatizare formalizată se vor putea evita contradicţiile, dar nu se va produce nimic interesant în matematici. O teorie falsă rămîne falsă, chiar dacă nu-i găsim contradicţiile, aşa după cum un act criminal rămîne criminal, fie că este sau nu sancţionat de vreun tribunal." Avînd în vedere descoperirile care contrazic intuiţia, ca, de pildă, curbe fără tangentă sau postulatul lui Bolyai-Lobacevski, Hilbert a răspuns la acest atac afirmînd că: „intuiţionismul înseamnă trădarea ştiinţei". Această observaţie l-a făcut pe Brouwer să adauge: „În problema de a şti de ce parte se află rigoarea matematică, cele două şcoli dau răspunsuri diferite: intuiţioniştii spun „în spiritul omenesc", iar formaliştii spun „pe hîrtie".

Cu mulţi ani mai înainte de a fi fost formulată teorema lui Gödel, H. Poincaré anticipa oarecum situaţia ce va fi creată de descoperirea lui Gödel într-o frumoasă „Introducere" la volumul *Valoarea ştiinţei*, din care vom reda cîteva fraze: „Cercetarea adevărului trebuie să fie ţelul activităţii noastre, este singurul scop demn de ea ... Totuşi, uneori adevărul ne înspăimîntă. Şi, în adevăr, ştim că uneori el este amăgitor, că apare ca o nălucă ce ni se arată o clipă, ca apoi să fugă fără încetare şi îl urmărim mai departe şi mereu mai departe, fără să-l putem atinge vreodată ... Dar dacă adevărul

este singurul scop ce merită să fie urmărit, putem spera că îl vom atinge ? Ne-am putea îndoi ... Adevărul ce ne este permis să-l întrezărim nu-i chiar ceea ce majoritatea oamenilor îl numesc aşa. ... Dar, mai întîi, de ce instrument dispunem ca să-l cucerim ? Inteligenţa omului, sau, ca să ne restrîngem, inteligenţa savantului, nu-i susceptibilă de o varietate infinită ? ... Matematicienii înşişi nu se aseamănă între ei, unii nu cunosc decît logica implacabilă, alţii apelează la intuiţie şi văd în ea unicul izvor al descoperirilor. Aceasta ar putea fi un motiv de neîncredere. Teoremele matematice ar putea să apară, sub aceeaşi înfăţişare, unor spirite aşa de deosebite ? Iar adevărul care nu-i acelaşi pentru toţi, mai este adevăr? Privind însă lucrurile mai îndeaproape, am putea vedea cum colaborează aceşti lucrători aşa de diferiţi la o operă comună, care nu s-ar putea desăvîrşi fără concursul lor ..."

Fără de aceste observaţii ale lui Poincaré, teorema lui Gödel ar încheia aventura geometriilor neeuclidiene într-un mod deconcertant, lăsîndu-ne impresia că setea de adevăr nu s-ar mai putea potoli vreodată, fiindcă el n-ar mai exista ! Poincaré ne arată însă că asemenea crize de desperare au

însoțit și altădată cercetările matematicienilor și că ei au găsit modalitatea să iasă din încurcătură. Odinioară și geometriile necuclidiene au fost în impas, dar ele au deschis calea geometriilor riemanniene, care au oferit lui Albert Einstein materialul gata pregătit pentru teoria relativității generalizate. Dealtfel, tot ele nu-s străine nici de faptul că acum am putut asista, de aici de pe Pămînt, la experiențele chimico-biologice comandate și executate de mintea omului pe solul lui Marte. Desigur că și ideile lui Gödel conțin în ele un proces creator, făuritor de noi tehnici teoretice și practice.

Iată ce gîndea, în această privință, marele matematician și fizician Hermann Weyl (1885—1955): „Problema fundamentelor și cea din urmă semnificare a matematicilor rămîne deschisă: noi nu știm în ce direcție se află soluția finală. Poate că «munca matematică», întocmai ca vorbirea sau muzica, este o activitate creatoare a omului, esențial originală, ale cărei decizii istorice desfid o completă raționalizare obiectivă."

NOTE

1. S. Stoilov : *Matematica și viața*, Editura Academiei R.S.R., București 1972, p. 139.

2. E.M. Bruins : *La géométrie non-euclidienne dans l'antiquité*, Paris, 1957.

3. Cele mai cunoscute lucrări cu caracter matematic ale egiptenilor sînt două papirusuri, compuse în timpul imperiului mijlociu : 1) *Papirusul Rhind*, o copie făcută de scribul Ahmes pe la 1 600 î.e.n. după o scriere mai veche și 2) *Papirusul din Moscova*, ce pare să fi fost scris pe la sfîrșitul mileniului al treilea î.e.n. În ambele lucrări se găsesc probleme rezolvate de elevii ce învățau la școala de scribi. Textele matematice sumeriene sau babiloniene sînt imprimate pe tăbliță de argilă uscate la soare sau arse în cuptor. Unele dintre ele sînt tot de prin al III-lea mileniu î.e.n. Au fost descoperite pînă acum peste 500 000 de asemenea tăbliță, dar pînă azi nu au fost descifrate decît vreo cîteva sute.

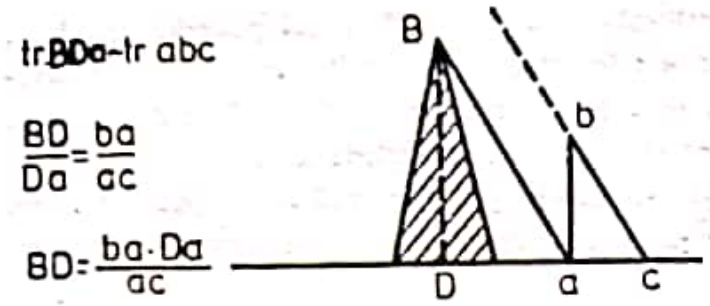
4. Transformarea cunoștințelor geometrice cu caracter empiric într-o știință demonstrativă, care să-și bazeze rezultatele pe raționamente deductive pornite de la anumite axiome sau postulate, este opera filozofilor eleni. Celelalte popoare ale antichității au ajuns la rezultate geometrice pe baza unor raționamente inductive, de obicei generalizînd rezultatele unor experiențe sau observații particulare. Asemenea concluzii empirice, bazate pe un număr limitat de observații sau experiențe, nu sînt decît *pielebit* adevărate. În scrierile egiptenilor sau ale babilonenilor apar uneori formule greșite pentru calcularea ariilor sau a volumelor. Tot la concluzii greșite

se poate ajunge și în urma raționamentelor inductive bazate pe analogie. De pildă, dacă din faptul că există o infinitate de poligoane regulate s-ar trage concluzia că trebuie să existe și o infinitate de poliedre regulate, ar fi greșit, fiindcă în realitate nu există decît 5 poliedre regulate. Numărul și forma lor au fost stabilite în școlile lui Pitagora și Platon. În dialogul intitulat *Timeu*, după ce numește și descrie cele cinci poliedre regulate, anume *tetraedrul* (format din 4 fețe triunghiuri echilaterale), *cubul* (mărginit de 6 pătrate), *octaedrul* (8 fețe triunghiuri echilaterale); *dodecaedrul* (15 fețe pentagoane regulate) și *icosaedrul* (mărginit de 20 de triunghiuri echilaterale), Platon stabilește și cum se pot construi aceste poliedre. Din această cauză, multă vreme poliedrele regulate au fost numite și *corpuri platoniciene*.

5. Despre Blaise Pascal (1623—1662), unul dintre cei mai de seamă matematicieni și filozofi din secolul al XVII-lea, se știe că avea o sănătate șubredă și suferea de insomnii. De altfel, autopsia a arătat că avea leziuni pe creier. Fiind odată, în anul 1658, într-o criză teribilă, a început să se gîndească la proprietățile cicloidei, curbă atunci în atenția matematicienilor din cauza multiplelor ei aplicații, nu numai în matematici, dar și în fizică etc. Adîncindu-se în cercetarea acestor proprietăți, Pascal a uitat de durerile ce-i păreau insuportabile și timp de 8 zile a lucrat încontinuu, descoperind atunci cele mai interesante proprietăți ale cicloidei. Sînt, dealtfel, și ultimele lui studii matematice; rezultatele au apărut sub pseudonimul Amos Detonville și erau adresate, în chip de provocare, cum era moda, matematicienilor francezi și englezi.

6. Tales din Milet (624—548 î.e.n.), declarat în 582 ca unul dintre cei 7 înțelepți ai Greciei, era totodată un om foarte activ. A fost negustor, matematician, astronom, inginer, filozof și om de stat. Legendele care s-au păstrat, legate de fiecare dintre îndeletniciri, au avut umorul necesar ca să reziste veacurilor. De pildă, se spune că, pe cînd era negustor, transportînd odată saci cu sare pe spinarea măgarilor, unul dintre ei a alunecat într-un rîu și, o parte din sare dizolvîndu-se, sarcina măgarului devenise mult mai ușoară. Cînd a fost să treacă al doilea vad, măgarul acela s-a cufundat singur în apă. Observînd aceasta, ca să-l dezvețe, a doua oară i-a schimbat încărcătura punîndu-i în spate bureți. Ca matematician se afirmă că a stîrnit admirația faraonului Amasiss calculînd înălțimea marii piramide prin măsurarea umbrei lăsată de un băț înfipt în nisip, la marginea umbrei lăsată de piramidă. Se vede de aici că el cunoștea unul dintre cazurile de asemănare a triunghiurilor dreptunghice și, în plus, considera că razele Soarelui sînt paralele între ele (fig. 23). Ca astronom, faima lui

Tales se leagă de faptul că a prezis eclipsa de Soare din 28 mai 585 î.e.n. Dar admirația pentru acest fapt nu era unanimă. Se spune că, într-o noapte, absorbit de gînduri, a căzut într-o groapă și văzîndu-l o femeie l-a întrebat : „Cum poți ști ce se petrece în cer, dacă nu știi ce se află la picioarele tale?"



$\triangle BDa \sim \triangle abc$

$\frac{BD}{Da} = \frac{ba}{ac}$

$BD = \frac{ba \cdot Da}{ac}$

Fig. 23

Ca inginer, se spune că ar fi ridicat un zăgaz strategic, schimbînd cursul unui riu, ca să lase un vad peste care urma să treacă armata lui Cresus. După ce a trecut, ar fi readus riul la matca lui normală și se spune că, astfel, întreaga armată dușmană a fost nimicită. Ca filozof, el considera *apa* drept element primordial, din care s-au născut toate celelalte lucruri și ființe. Întrebat despre conduita cea mai bună în viață, el a răspuns : „Abține-te să faci ceea ce critici la alții". În calitate de om de stat, el i-a sfătuit pe compatrioți să nu se alieze cu Cresus, ci să se unească cu celelalte cetăți ioniene într-o federație. Se pare că Tales a scris un tratat de astronomie, care s-a pierdut, ca și toate celelalte lucrări ale sale. În geometrie i se atribuie următoarele teoreme : „Cercul este înjumătățit de oricare dintre diametrii lui", „Unghiurile opuse la vîrf sînt egale", „Unghiurile înscrise într-un semicerc sînt drepte", „Triunghiul isoscel are unghiurile de la bază egale" etc.

7. Știința despre măsurarea pămîntului poartă numele de *geodezie*, de la *geo* = pămînt și *daiein* = a împărți. Numirea a fost inventată de Arhimede (287—212 î.e.n.) pentru capitolul de geometrie aplicată, ca să deosebească astfel aceste probleme de acelea teoretice tratate în geometrie.

8. Se pare că noțiunea de unghi a fost introdusă de Tales. Ea nu era cunoscută nici de egipteni și nici de babiloneni, care foloseau, în locul acesteia, noțiunea de *pantă* sau *înclinare*. Această noțiune se exprima prin cotangenta unghiului respectiv, anume ctg $B = BA/AC$, numită de egipteni *seked* (fig. 24). Cuvîntul, în compunerea căruia intră verbul *ked* = a clădi, are înțeles de „ceea ce determină natura sau forma". *Seked*-ul apare în toate problemele legate de construirea piramidelor. Același raport era folosit

și de babilonenі, numindu-l *sagal*, termen ce se traduce prin „coeficient" sau „factor". Atît *sekedul* cît și *sagalul* erau exprimate prin raportul unităților de lungime folosite în acea epocă. De altcum, noțiunea de pantă o găsim și în prezent, de pildă, atunci cînd se indică *înclinarea* sau *gradientul*

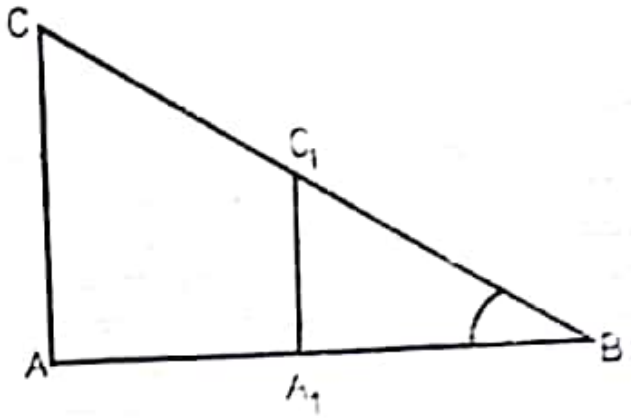


Fig. 24

unui drum BC față de planul orizontal AB. Din fig. 24 avem $\operatorname{tg} B = AC/AB$ și dacă considerăm $A_1B = 1$, atunci se poate scrie $\operatorname{tg} B = A_1C_1$, adică *panta* sau *gradientul* unui drum este devierea drumului la distanța de 1 m față de planul orizontal socotit de la o origine B.

9 Printre cei dintîi elevi ai lui Tales a fost și filozoful Anaximandru (610—543 î.e.n.). El a introdus noțiunea de sferă cerească, pe care presupunea că se găsesc fixate stelele, și a construit prima hartă geografică, folosind proiecția ortogonală. Tot lui i se atribuie și introducerea noțiunii de infinit, anume el a considerat că Universul este infinit.

10. Se spune că Pitagora (580—510 î.e.n.) a căpătat primele cunoștințe de geometrie de la Anaximandru și că acesta l-a sfătuit să plece la Teba. După ce a stat cîțiva ani în Egipt și în Babilon, s-a întors la Samos, dar nu a rămas acolo, ci s-a stabilit la Croton unde a înființat o școală de filozofie, care se baza pe postulatul că *totul este număr*. În acest sens, el a legat unitatea aritmetică de punctul geometric, considerînd că „unitatea aritmetică este punct fără de poziție, iar punctul geometric este unitate avînd o poziție determinată". Prin *număr*, atît pitagoreicii cît și ceilalți matematicieni greci de mai tîrziu înțelegeau numai *numărul natural*. Numerele fracționare au fost privite ca *mărimi* (geometrice, fizice etc.) ce se exprimau prin raportul dintre două numere (naturale). Atunci cînd pitagoreicii au stabilit că raportul dintre diagonala pătratului și latura lui nu se poate exprima prin cîtul dintre două numere naturale, această descoperire a însemnat o lovitură capitală pentru doctrina care afirma că

totul se exprimă prin numere. Din această cauză, acest raport a şi fost numit *raţional*, adică *fără sens*, *inexprimabil*. Despre Pitagora, Cicero povesteşte următoarea anecdotă, pe care a tradus-o dintr-o lucrare a lui Sosicrates din Rodos (sec. II î.e.n.) ; întrebat ce profesiune avea, Pitagora a răspuns că este filozof. Atunci a fost din nou întrebat :

— Ce sînt filozofii şi prin ce se deosebesc ei de ceilalţi oameni ?

— Să asemuim lumea cu o mare serbare la care se adună aproape toţi locuitorii Greciei, a răspuns Pitagora şi a continuat : Mulţi vin din ambiţia de a li se remarca agerimea în lupte şi de a cîştiga premii, alţii vin ca să facă negoţ, alţii însă nu vin ca să caute aplauze sau cîştiguri, ci numai din curiozitatea de a asista la spectacole, fără alt scop decît să vadă ce se întîmplă. În viaţă este la fel, unii caută să ajungă la glorie, alţii la bogăţie, iar alţii, în număr foarte mic, se străduiesc să cunoască natura, lăsînd pentru rest foarte puţin. Aceştia sînt filozofii, adică iubitorii de înţelepciune. Şi, după cum cel mai frumos rol la jocurile publice este acela de spectator, tot aşa cea mai frumoasă şi nobilă ocupaţie în această lume este studiul şi contemplarea naturii.

11. Atît în *Dialogurile* lui Platon, cît şi în *Istoria geometriei* scrisă de Eudem (sec. IV î.e.n.), se afirmă că Pitagora a folosit pentru prima oară cuvîntul *matematică* în înţeles de studiul aritmeticii şi al geometriei. Mai înainte, sensul cuvîntului *mathemata* era de *subiect de învăţătură*. Pitagora a împărţit matematica în patru secţii deosebite : 1) teoria numerelor absolute sau *aritmetica*, 2) teoria numerelor aplicate sau *muzica*, 3) teoria mărimilor în stare de repaus sau *geometria* şi 4) teoria mărimilor în stare de mişcare sau *astronomia*. Pînă în timpul Renaşterii, acest „quadrivium" a fost considerat ca program al obiectelor de studiu din învăţămîntul superior.

12. În şcoala lui Platon (429—348 î.e.n.) s-a dat o deosebită atenţie studiului geometriei plane şi în spaţiu. Se spune că fiind odată întrebat cu ce se ocupă zeii, Platon ar fi răspuns : „Cu geometria !" În multe dintre dialoguri se găsesc tratate nu numai problemele, dar şi metoda de raţionament folosită în matematică. De pildă, în *Statul :* „Cred că ştii cum fac cei care au de-a face cu geometria, aritmetica şi alte ştiinţe înrudite... ei trec de la ipoteze imediat la dezvoltare şi ajung pînă la urmă, pe calea consecinţelor, la acel punct a cărui clarificare o intenţionează." Sau, în *Republica :* „Geometrii se servesc de figuri vizibile şi fac judecăţi asupra acestora, deşi ei nu se gîndesc la aceste figuri, ci la altele cu care se aseamănă, dar care nu pot fi sesizate decît cu mintea." În *Menon*, Platon defineşte figura ca fiind : „ceea ce mărgineşte un solid" şi, mai departe, el dis-

cută despre incomensurabilitatea dintre latura unui pătrat și diagonala lui. Cu clasificarea mărimilor iraționale algebrice de gradul al doilea în general, s-a ocupat însă mai cu seamă în Theetet. Theetet (415—368) a fost elevul lui Platon și, la îndemnul învățătorului său, el a studiat îndeaproape aceste mărimi. În *Timeus* au fost prezentate cele cinci poliedre regulate, care se pare că au fost descoperite de către pitagoreici. Totuși, în școala lui Platon ele au fost studiate mai temeinic și au fost stabilite metode de construire a lor. Construirea dodecaedrului și a icosaedrului este descrisă în dialogul *Theetet*. De școala lui Platon se leagă și cercetările lui Eudoxos din Chios (408—355 î.e.n.), elev al lui Archytas din Tarent (428—365 î.e.n.), care era prieten cu Platon. Eudoxos a stabilit *teoria generală a proporțiilor*, adică a precizat și generalizat noțiunea de raport a două mărimi, stabilită de Pitagora numai în cazul numerelor întregi. Eudoxos a extins problema și pentru cazul cînd termenii unei proporții erau mărimi iraționale. Tot Eudoxos a descoperit și *metoda exhaustivă*. Această metodă reprezintă un procedeu care permite să se calculeze ariile mărginite de linii curbe și constă în a scădea dintr-o mărime de evaluat un șir de termeni în așa fel ca diferența obținută să devină mai mică decît o anumită mărime dată. El a stabilit astfel existența valorilor limită fără să recurgă, explicit, la ideea de infinit mic. Prin aceasta, Eudoxos este considerat ca un precursor al *Calculului integral*. Numirea de metodă exhaustivă a fost dată în secolul al XVIII-lea.

13. Iată cîteva dintre școlile matematice importante: În secolul al V-lea î.e.n. funcționa școala condusă de Oinopides, despre care Proclus amintește că a insistat asupra construcțiilor exacte făcute cu rigla și compasul și a stabilit cum se construiește astfel un unghi sau cum se duce o perpendiculară pe o dreaptă. Altă școală exista în Eleea, condusă de Parmenide și Zenon (sec. V î.e.n.). În Tracia, Leucip (sec. V î.e.n.), elevul lui Zenon, a înființat școala atomistică. Reprezentantul cel mai de seamă al ei a fost Democrit din Abdera (460—357 î.e.n.). Acesta a călătorit prin Egipt și Babilon și la întoarcere se lăuda că nici unul dintre învățații cu care a discutat probleme de geometrie nu l-a întrecut în abilitatea cu care stabilea demonstrațiile. Și în Atena au existat mai multe școli matematice ; una a fost condusă de Anaxagora din Clazomene (500—428 î.e.n.), ultimul filozof din școala ioniană ; altele au fost înființate de sofiști, precum Hippias din Elis (sec. V î.e.n.) sau de Hipocrate din Chios (sec. V î.e.n.), care a compus și primul tratat sistematic de geometrie, intitulat *Elemente*. Mai tîrziu, după afirmațiile lui Proclus, aceste *Elemente* au fost perfecționate de Neoclid și Leon (pe la 370 î.e.n.), despre care se crede că a fost mai în vîrstă decît Eudoxos. Un alt text care cuprindea teoreme de geometrie,

intitulat tot *Elemente*, a fost întocmit de Teudius din Magnezia (340 î.e.n.). Această ultimă lucrare se pare că folosise ca manual în școlile lui Platon și Aristotel. În dialogul *Statul*, Platon făcea aluzie la acest tratat.

14. Aristotel (384—322 î.e.n.) a studiat în Academia lui Platon și apoi a fost preceptorul lui Alexandru cel Mare. Întors în Atena, a organizat o școală după modelul *Academiei*, numită *Lyceum* (din cauză că ea se afla în grădina ce înconjura templul lui Apollon Lykeion). Fiindcă filozoful își ținea lecțiile sale plimbîndu-se împreună cu elevii lui, aceștia au căpătat porecla de *peripatetici* (de la *peripatos* = promenadă). Aristotel făcea zilnic două promenade (lecții). Dimineața erau lecțiile *acromatice* sau *esoterice* pentru elevii avansați, iar seara lecțiile *comune* sau *exoterice*, la care participau începătorii. Se spune că Alexandru cel Mare a aflat că Aristotel a publicat la Atena lecțiile lui acromatice. Supărat, a trimis învățătorului său următoarea scrisoare: „Ați greșit publicînd lecțiile acromatice. Ce superioritate voi mai avea eu față de ceilalți oameni, dacă lucru... pe care le-am învățat eu sînt comunicate mulțimii? Trebuie să știți că vreau să fiu primul în toate, prin știință nu mai puțin decît prin putere!" Iată și răspunsul lui Aristotel: „Mi-ați scris ca să mă ocăriți că mi-am publicat lecțiile mele acromatice. Ele sînt, în adevăr, date publicului, dar nu sînt publice, căci ele rămîn de neînțeles acelora care nu au auzit explicațiile mele." Aristotel a avut predilecție pentru științele naturii și este creatorul dicționarului. Lui Aristotel i se datorează compunerea primei lucrări de istorie a geometriei. Ea a fost scrisă la îndemnul lui, de Eudemos din Rodos, elevul lui Aristotel. Din această lucrare nu s-au păstrat decît cîteva fragmente, aflate în *Comentariile* pe care Proclus (sec. V e.n.) le-a scris la Cartea I a *Elementelor* lui Euclid.

15. Oscar Becker: *Fundamentele matematicii*, Editura științifică, București, 1968, p. 121. Aristotel a folosit pentru prima oară cuvîntul *axiomă*.

16. Aristotel: *Fizica*, Editura științifică, București, 1968, p. 36 și O. Becker, l.c. nr. 15, p. 143.

17. Proclus Diadohul (410—485) (porecla *diadoh* înseamnă succesor), a fost conducătorul școlii filozofice din Atena renăscută după desființarea muzeului din Alexandria. El nu a fost un matematician-creator, ci numai un comentator al operelor matematice și filozofice. Pentru istoria matematicilor grecești, *Comentariile la Cartea I a Elementelor lui Euclid* scrisă de el, are o deosebită importanță, fiindcă în această carte se găsesc nu nu-

mai informații asupra matematicilor greceşti, dar ea cuprinde şi fragmente din cărțile vechi ce au fost pierdute ulterior, pe care el le mai avea şi din care a redat diverse pasaje. Astfel, numai datorită lui Proclus avem cunoştință de o parte din *Istoria geometriei* compusă de Eudemos din Rodos (sec. IV î.e.n.) şi copiată de Geminus din Rodos (sec. I î.e.n.), el însuşi geometru şi interesat de istoria matematicilor. Pe lîngă aceste fragmente din *Istoria* lui Eudemos, Proclus a mai copiat şi o parte din lucrările lui Geminus. Printre aceste scrieri se găseau transcrise criticile aduse principiilor geometriei, aşa cum au fost ele formulate de Aristotel, Euclid, Arhimede, Appolonius şi alți matematicieni.

18. Grecii antici făceau o deosebire precisă între *aritmetica teoretică*, numită de ei — simplu — *Aritmetică*, şi *aritmetica practică*, denumită *Logistică*. Logistica se preda în şcolile elementare şi ea cuprindea scrierea şi citirea numerelor, operațiile cu numere naturale şi fracții, precum şi aplicații practice ale geometriei, de pildă, la calcularea ariilor, a capacităților, volumelor etc.

19. În *Comentarii*, Proclus clarifică înțelesul pe care l-a dat Euclid termenului „elemente" şi discută metoda folosită de Euclid în compunerea lucrării sale, astfel: „Se obişnuieşte acum ca unele din teoreme să fie numite elemente, celelalte elementare. Din domeniul de valabilitate al acestora se separă o a treia grupă. Elemente se numesc acele propoziții al căror studiu are efect asupra cunoaşterii celorlalte şi prin care se obține rezolvarea dificultăților existente. Căci aşa cum limba scrisă cunoaşte elemente de bază, foarte simple şi indivizibile, pe care noi le numim litere, şi aşa cum fiecare cuvînt şi fiecare propoziție constă din acestea, tot astfel există şi în întregul domeniu al geometriei anumite propoziții de importanță preponderentă, care revendică rangul de principii față de consecințele ce decurg din ele... şi tocmai pe acestea le numim elemente... Euclid împarte şi principiile comune în definiții, postulate şi axiome. Toate acestea sînt deosebite între ele... dacă ceea ce este admis ca principiu este simplu şi evident în sine pentru un învățăcel, atunci este vorba de o axiomă, ca, de pildă, propoziția: dacă două mărimi sînt egale cu a treia, atunci sînt egale între ele. Dacă însă cel care ascultă o afirmație nu o înțelege ca ceva evident, de la sine, şi totuşi afirmația este enunțată şi el o admite, atunci este vorba de o definiție. Faptul, de pildă, că cercul este o figură cu anumite proprietăți nu se găseşte în mintea noastră dinainte, ca noțiune comună şi fără ca cineva să ne-o fi explicat; dacă însă o ascultăm, atunci o admitem fără demonstrație. Dacă însă afirmația este încă necunoscută şi cu toate acestea este acceptată, deşi ascultătorul nu o admite, atunci,

spune Aristotel, avem de-a face cu un postulat, ca de pildă propoziția că toate unghiurile drepte sînt egale între ele." (O. Becker, loc. cit. pp. 122—124).

20. Matematicienii greci au descoperit că nu toate problemele de geometrie puteau fi rezolvate cu rigla și compasul. Astfel, nu se putea împărți cu rigla și compasul un unghi în trei părți egale. Ca să realizeze această împărțire, sofistul Hippias din Elis a descoperit o curbă (numită mai tîrziu *cuadratrice*) care se putea trasa cu un instrument inventat de el, în acest scop. Iată cît de ingenios a fost imaginată această împărțire a unui unghi în trei părți egale: Se consideră un pătrat $OABC$ (fig. 25) în care latura OC se rotește uniform în jurul punctului O. În acest caz, punctul C descrie arcul de cerc AC. Dacă se presupune că, în același timp, latura CB se deplasează tot uniform, paralel cu ea însăși, în așa fel ca să ajungă să se suprapună peste OA, deodată cu OC, punctele T de intersecție dintre aceste două drepte în mișcare generează o curbă. Această curbă a fost numită mai tîrziu, din cauza unei noi proprietăți a ei, *cuadratrice*. Arcul $CT_1\,T_2\,T_3$ reprezintă numai o parte a acestei curbe, ramurile ei întinzîndu-se spre nesfîrșit. Iată cum se face trisecția acestui sfert de cerc AC: Împărțim segmentul OC în trei părți egale cu rigla și compasul, fie C_1 și C_2 punctele găsite. Ducînd paralelele din C_1 și C_2 la OA, ele întîlnesc

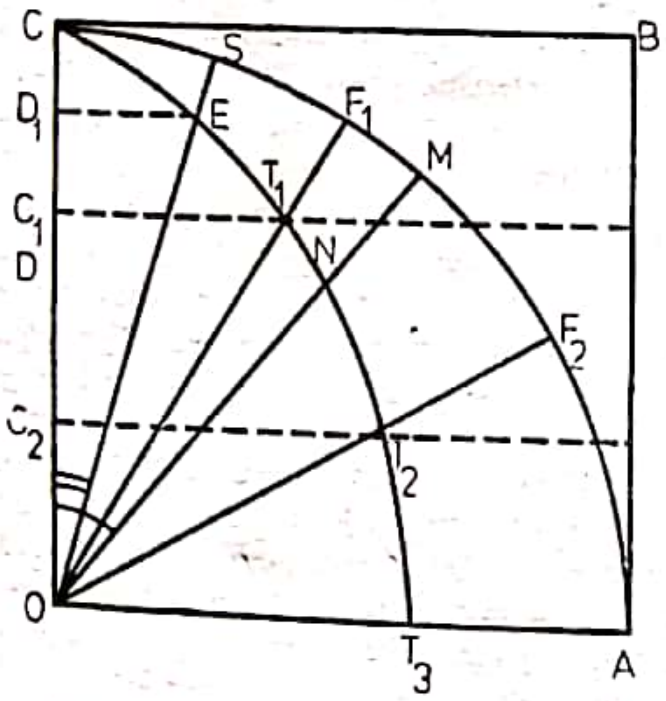


Fig. 25

cuadratricea în punctele T_1 și T_2. Razele OF_1 și OF_2 care trec prin T_1 și T_2 împart arcul de cerc în trei părți egale. Analog se poate împărți orice unghi în trei părți egale. De pildă, unghiul COM. Raza OM taie cuadra-

tricea în N. Ducînd perpendiculara ND pe OC și construind segmentul $CD_1 = 1/3\, CD$, se duce paralela din D_1 la OA și punctul de intersecție cu cuadratricea, E, arată că raza OE taie arcul CM în S astfel că $\sphericalangle COS = 1/3\ \sphericalangle COM$. Se înțelege că un unghi poate fi împărțit astfel, cu ajutorul cuadratricei, și în alt număr de părți egale. Tot astfel, în construcția unui cub cu un volum de două ori mai mare decît al altui cub dat, rigla și compasul nu erau de nici un folos. Și în acest caz, Arhitas din Tarent (428—365 î.e.n.) a construit un instrument, pe care l-a numit *mezograf*, cu ajutorul căruia putea construi curbele ce soluționau problema. Asemenea soluții însă nu au fost acceptate, adică nu au fost admise ca fiind geometrice nici de Platon, nici de Aristotel și nici de Euclid.

21. Deosebirea dintre *axiomă* și *postulat* nu mai era bine precizată nici chiar pe vremea lui Proclus. Cu timpul ea s-a pierdut cu totul și, din această cauză, în multe manuscrise axiomele și postulatele sînt trecute unele după altele, sub denumirea de axiome. În lucrarea citată a lui Proclus el mai scria : „Axiomele și postulatele au comun aceea că nu au nevoie de demonstrație și nici de confirmare geometrică, ci se consideră evidente și devin începutul celor ce urmează" (V. Marian, *Euclid*, vol. I, p. 207, București, 1939). Și tot el adaugă mai departe : „Alții ar putea să spună că postulatele sînt specifice materiei geometrice, pe cînd axiomele, din contra, sînt comune teoriei generale a cantității (numerice) și a mărimii (geometrice)" (loc. cit. Becker, p. 128). Cuvîntul postulat provine din latinește fiind traducerea termenului folosit de Euclid : *aitima* = *postulatum* = cerere. Cerînd să se construiască cele mai simple figuri, Euclid accepta ca evidentă și existența lor.

22. Cele 5 noțiuni comune sau axiome, stabilite de Euclid, sînt : 1) Cele egale cu aceeași sînt egale și între ele, 2) Și dacă la egale se adună egale, cele întregi sînt egale, 3) Și dacă din egale se scad egale, cele rămase sînt egale, 4) Și cele care coincid una cu alta sînt egale între ele, 5) Și întregul este mai mare decît partea.

23. Dintre cele două cărți adăugate ulterior *Elementelor*, Cartea a XIV-a a fost compusă de Hypsicle din Alexandria (sec. II î.e.n.), matematician și astronom grec, cunoscut și prin faptul că a introdus pentru prima dată împărțirea cercului în 360°, așa cum era obișnuit la babiloneni. Cartea a XIV-a începe cu o prefață, în formă de scrisoare adresată lui Protarhus, prieten cu tatăl lui Hypsicle, arătînd că el a compus-o ca să comenteze o lucrare despre „compararea dodecaedrului și icosaedrului, înscrise într-o sferă", în care Apollonius ar fi făcut anumite greșeli. Metoda de a scrie pre-

fața în formă de scrisoare era pe atunci la modă și multe dintre lucrările lui Arhimede (287—212 î.e.n.) încep astfel. Hypsicle citează aici teoreme din Cartea a XIII-a a lui Euclid, precum și o teoremă a lui Aristeu (secolul IV î.e.n.) unul dintre primii matematicieni greci de după Platon, care a scris despre cele cinci poliedre regulate. Cartea a XV-a cuprinde tot teoreme despre poliedrele regulate, anume înscrierea unora în altele, determinarea muchiilor, a unghiurilor, precum și a înclinării planelor poliedrelor regulate. Această carte pare să fi avut mai mulți autori, întregindu-se pe parcursul a câtorva veacuri. Printre presupușii autori se consideră a fi fost și Damaskias din Damasc, unul dintre conducătorii școlii din Atena, prin anul 510. Alt autor pare să fi fost Isidor din Milet, care a trăit tot prin secolul al VI-lea în Bizanț și a zidit, împreună cu Antemiu, catedrala Sf. Sofia din Constantinopol. Această ultimă carte este însă departe de a putea fi comparată, în ceea ce privește claritatea demonstrațiilor și rigurozitatea lor, cu celelalte cărți compuse de Euclid.

24. Iată ce scria Proclus, în legătură cu postulatul al IV-lea : „propoziția despre egalitatea tuturor unghiurilor drepte nu este un postulat... Căci această propoziție nu este întrebuințată la o construcție, nici nu cere să se găsească ceva, ci lămurește o proprietate comună unghiurilor drepte"... Proclus a încercat chiar să demonstreze acest postulat, care, după cum știm, azi nici nu mai figurează printre postulate.

25. Claudiu Ptolemeu (85 — 168 ?) a rămas tot așa de celebru prin cursul său de astronomie, cunoscut sub numele, derivat din limba arabă, *Almagesta*, ca și Euclid. Dar el nu era numai astronom, ci și un mare geometru. În această calitate, a făcut însă o mare greșeală : s-a lăsat indus în eroare de iluzia că postulatul al V-lea al lui Euclid poate fi demonstrat, așadar poate fi scos din lista postulatelor, fără a pune nimic în loc ! Iată cum a procedat : întîi a dovedit, pe altă cale decît Euclid, teorema 28.

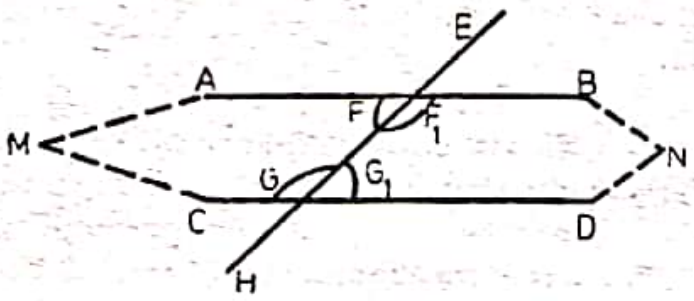


Fig. 26

Fie *AB* și *CD* (fig. 26) cele două drepte tăiate de secanta *EFGH*, astfel că suma unghiurilor interne *F* și *G* să fie egală cu două unghiuri drepte. Dreptele *AB* și *CD* sînt paralele, căci altfel, prelungite, se vor întîlni în

M sau N. Dar unghiurile F și G fac două unghiuri drepte, iar două drepte nu pot închide un spațiu ; așadar, dreptele AB și CD sînt paralele. După cum vedem, Ptolemeu a folosit metoda reducerii la absurd. În același mod a încercat să dovedească și reciproca, adică tocmai postulatul al V-lea, exprimat sub forma : „dacă dreptele AB și CD sînt paralele, atunci suma unghiurilor F și G este egală cu două unghiuri drepte". Presupunînd că suma unghiurilor F și G nu este egală cu două unghiuri drepte, atunci ea trebuie să fie mai mare sau mai mică decît două unghiuri drepte. Admițînd prima ipoteză, rezultă că și suma unghiurilor F_1 și G_1, formate de semidreptele FB și GD, care „nu sînt mai puțin paralele decît semidreptele FA și GC", este mai mare decît două unghiuri drepte. Însă, pe de altă parte, suma unghiurilor F_1 și G_1, adiacente unghiurilor F și G, trebuie să fie mai mică decît două unghiuri drepte, ceea ce duce la contradicție ! Așadar, această sumă este egală cu două unghiuri drepte. Ptolemeu a considerat astfel demonstrat postulatul al V-lea. În realitate, el a făcut o greșeală logică și anume, admițînd că de o parte și de alta a secantei suma unghiurilor F și G este aceeași ca și suma unghiurilor F_1 și G_1, Ptolemeu a introdus astfel un postulat echivalent cu acela ce intenționa să-l demonstreze.

26. Geminus din Rodos (sec. I î.e.n.) a fost elevul lui Posidoniu din Apameia (135 — 51 î.e.n.), unul dintre cei mai renumiți savanți și astronomi ai școlii din Rodos. Lui Posidoniu i se atribuie cele mai exacte valori ale diametrului Soarelui și a distanței Pămînt-Soare, cunoscute în antichitate, precum și explicațiile fenomenelor de la răsăritul și apusul Lunii și a Soarelui, prin refracția atmosferică. În geometrie, el a dat o altă definiție dreptelor paralele, anume „dreptele care, aflîndu-se într-un plan, nu se apropie și nu se depărtează una de cealaltă, astfel încît toate perpendicularele, duse din punctele uneia dintre ele pe cealaltă, sînt egale între ele". Cu alte cuvinte, Posidoniu admitea că dreptele paralele sînt *drepte echidistante*. Or, prin aceasta, el enunța, sub altă formă, postulatul paralelelor, deoarece *presupunea* că toate punctele așezate la aceeași distanță de o dreaptă se găsesc pe o dreaptă și nu pe o altă linie, *care ar putea să nu fie dreaptă*. Acest fapt nu este însă adevărat decît în plan. Dacă, de pildă, în locul planului s-ar considera o sferă, să spunem sfera pămîntească, și ca dreaptă am lua ecuatorul lui, atunci toate punctele echidistante de ecuator (cerc mare) se află pe un cerc paralel, adică pe un cerc mic. Dar, un asemenea cerc mic nu mai corespunde, pe sferă, liniei drepte, așa cum se întîmplă cu ecuatorul ! Înlocuind deci planul cu sfera, definiția paralelelor dată de Posidoniu ar fi falsă ! Geminus a scris o lucrare

enciclopedică : *Șase cărți despre teoriile matematice*, care s-a pierdut. Azi nu se cunosc decît fragmentele citate de alți autori.

27. Geminus s-a referit la *asimptota unei curbe*. Cuvîntul *asimptotă*, de origine greacă, se compune din *a* = fără și *simptos* = întîlnire, coincidență ; așadar, asimptota unei curbe este o dreaptă de care curba se apropie oricît de mult, dar nu o întîlnește la distanță finită. Geminus avea cunoștință de existența unor curbe care aveau asimptote. El a dat, ca exemplu, *hiperbola echilateră* (fig. 27) descoperită de Menechmos, matematician renumit din secolul al IV-lea î.e.n., elevul lui Eudoxos și al lui Platon, iar după moartea lui Eudoxos, conducătorul școlii din Cyzic. Menechmos a găsit această curbă ocupîndu-se de problema duplicării cubului. Se spune că și Menechmos a fost învățătorul lui Alexandru cel Mare, care i-ar fi cerut odată să-i prezinte geometria mai pe scurt. La aceasta, el a răspuns : „O, rege, pentru călătorii care străbat țările, există drumuri regale și drumuri pentru vulg, dar în geometrie nu există decît un singur drum". După cum se vede, această anecdotă circulă în două versiuni, cealaltă avînd ca eroi pe Ptolemeu, regele Egiptului, și Euclid. A doua curbă la care se referea Geminus era *concoida*, curbă descoperită de Nicomede (sec. II î.e.n.). El a găsit-o căutînd o soluție în problema trisecției unghiului

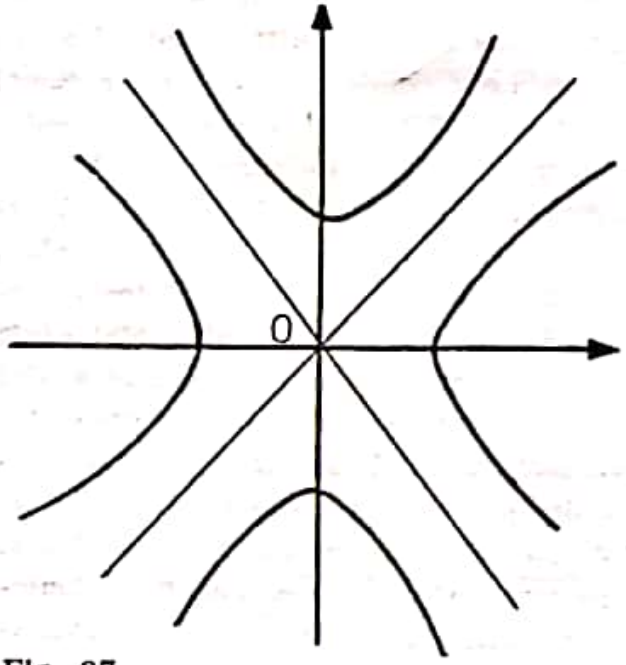


Fig. 27

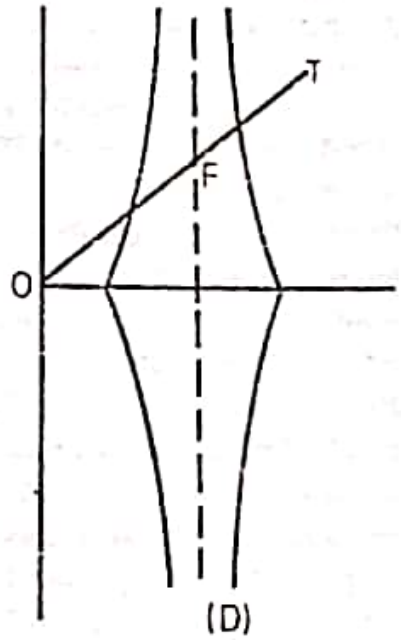


Fig. 28

[5] I l-a dat acest nume fiindcă avea forma unei scoici (*konche* = scoică și *eidos* = formă, înfățișare). Această curbă a fost definită prin proprietatea punctelor ei de a se găsi la o anumită distanță de un anumit punct fix

O, distanță care se socotește astfel: Se consideră o dreaptă fixă (D) (fig. 28) și se duc prin O diferite raze vectoare. Pe fiecare dintre ele se măsoară distanța $OT = OF \pm a$, unde a este o mărime fixă care poate fi mai mare, egală sau mai mică decît distanța de la punctul O la dreapta (D). Rezultă de aici că înfățișarea curbei depinde de această alegere. Nicomede a stabilit că concoida are o asimptotă și totodată a realizat un instrument cu care să o poată construi.

28. Comentariile matematicianului arab ibn Hatim an-Nairizi (sec. X), cunoscut mai ales sub numele latinizat Anaritius, au fost traduse în latinește în secolul al XII-lea de Gherard din Cremona. Această traducere a circulat însă numai în manuscris, fiind tipărită abia la sfîrșitul secolului al XIX-lea.

29. În afară de *Cartea comentariilor la introducerile din cartea lui Euclid*, Abu ali al-Hasan ibn al-Haitam (965—1039), cunoscut sub numele latinizat Alhazen, a mai scris o lucrare despre *Elementele* lui Euclid, anume: *Despre rezolvarea ideilor din cartea lui Euclid*. Alhazen a fost unul dintre cei mai înzestrați matematicieni din Irak, cunoscut și ca fizician, astronom și medic. Între altele, a scris o carte importantă de optică și a generalizat unele dintre teoremele lui Arhimede.

30. Omar al-Khayyam (1048 — 1123), a fost filozof, poet, geometru, algebrist și un remarcabil astronom. El a preconizat prima reformă a calendarului musulman în anul 1079 cu o precizie mai mare decît aceea realizată peste cinci secole, cînd s-a făcut reforma calendarului gregorian. *Comentariile la dificultățile...* au rămas pierdute pînă în secolul XX. Atunci au fost descoperite și publicate, întîi în 1936 în limba arabă, iar apoi au fost traduse în rusește și comentate de B.A. Rozenfeld și A.P. Jușkievici în 1953. Propoziția pe care Khayyam afirma că o deține de la Aristotel trebuie să fi existat într-una din operele lui pierdute, căci, în cele ce se cunosc acum, ea nu există.

31. Numele lui Nasir ed-Din at-Tusi (1201 — 1274) este pronunțat și azi cu admirație pentru opera științifică pe care a lăsat-o în domeniul astronomiei, trigonometriei și geometriei. El a scris prima carte sistematică de trigonometrie plană și sferică, intitulată *Tratatul despre patrulaterul complet*, întîi în limba persană și apoi a tradus-o în arabă, în 1260. Cartea a avut o deosebită influență asupra dezvoltării trigonometriei în Europa.

32. Prima traducere a *Elementelor* lui Euclid din limba arabă în limba latină a fost făcută de Adelard de Bath în jurul anului 1100 și a fost urmată de traducerea lui Gherard din Cremona (1114 — 1187) prin jurul anului 1150. În secolul al XIII-lea, în anul 1260, folosindu-se de traducerea lui Adelard de Bath, Campano din Novara a stabilit o nouă traducere a *Elementelor*. Spre sfîrșitul veacului al XV-lea, *Elementele* lui Euclid au fost tipărite. Prima carte a fost versiunea lui Campano și a apărut la Veneția în 1482. În 1530 a apărut, la Bâle, ediția *princeps* a textului grec. Această ediție și cele ce au urmat s-au bazat pe un manuscris al *Elementelor* ce data din vremea lui Teon din Alexandria și care se considera că ar fi datorit chiar lui. Azi, *Elementel.* lui Euclid sînt traduse în toate limbile din Europa și în multe dintre limbile orientale.

33. Filozoful englez Thomas Hobbes (1588 — 1679), și el fost student al Universității din Oxford, mai înainte de anul 1619, cînd s-a înființat acolo o catedră de geometrie, a văzut pentru prima oară *Elementele* lui Euclid prin 1634, cînd se afla la Paris în casa unui prieten. Se spune că atunci a citit pentru prima oară o teoremă de geometrie și a rămas așa de încîntat de metoda logică de a stabili adevărul, încît a devenit apoi un pasionat geometru. Totodată, în lucrările lui filozofice: *Leviathan* și *De corpore* a atacat administrația Universităților pentru neglijența de a nu da importanța cuvenită studiului geometriei, arătînd că „geometria este considerată de mulți ca *ars diabolica*, iar pe cei ce o predau ca înfrățiți cu diavolul".

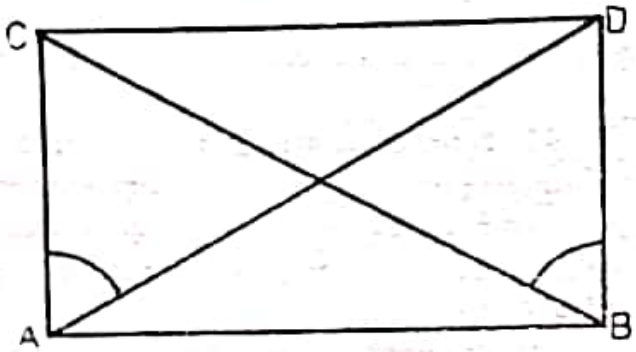
34. Christoph Schlüssel (1537 — 1612), cunoscut sub numele de Clavius, a fost cel mai activ matematician german din secolul al XVI-lea. Era călugăr iezuit și a petrecut o parte a vieții la Roma, unde a contribuit, prin cărțile pe care le-a scris și prin activitatea lui, la dezvoltarea școlii latine.

35. John Wallis (1616 — 1703) a fost profesor de matematici la Oxford și, de asemenea, un pasionat și genial matematician. A editat o parte din operele matematice ale lui Arhimede, Eutocius, Ptolemeu și Aristarh. Era și un cercetător al istoriei matematicilor. Tratatul său de algebră, publicat în 1685, conține un material istoric bogat și constituie astfel începutul studiilor serioase de istorie a matematicilor din Anglia. Opera lui originală, foarte voluminoasă, tratează domeniile cele mai variate, și moderne atunci, ale matematicilor: aritmetică, analiză, geometrie-algebră etc.

36. Metoda *demonstrației prin reducere la absurd* se bazează pe două principii ale logicii clasice și anume *noncontradicția* și *terțul exclus*. Principiul *noncontradicției*, formulat de Aristotel, arată că este imposibil să fie adevărate două enunțuri dintre care unul să afirme și celălalt să nege același predicat despre același subiect, iar principiul *terțului exclus* arată că un enunț nu poate fi decît adevărat sau fals, o a treia posibilitate este exclusă.

37. Iată demonstrația dată de Saccheri pentru stabilirea egalității unghiurilor C și D : „Se duc AD și CB (fig. 29) și se consideră triunghiurile

Fig. 29



CAB și DBA. Acestea sînt egale și de aici rezultă $AD = BC$. Apoi se consideră triunghiurile ACD și BDC, de asemenea egale, de unde rezultă $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC$.

38. Matematicianul german J. Chr. Heilbronner (1706 — 1747) a scris primul tratat de istorie a matematicilor, în sensul riguros al cuvîntului. În 1739 a tipărit la Frankfurt *Încercări asupra unei istorii a matematicii și a aritmeticii*, iar în 1742 a apărut opera lui principală : *Historia matheseos Universae*, tipărită la Leipzig. A doua istorie a matematicilor a fost scrisă de matematicianul și eruditul francez Jean E. Montucla (1725 — 1799). Aceasta este prima istorie modernă a matematicilor, devenită imediat clasică. Lucrarea s-a răspîndit pretutindeni și cu toate că în prezent s-au scris multe tratate foarte prețioase asupra acestui subiect, *Istoria matematicilor* scrisă de Montucla a fost de curînd reeditată. Prima ediție a apărut la Paris în două volume, în anul 1758, iar a doua ediție, în 4 volume, între 1799 — 1802, tot la Paris.

39. G. S. Klügel (1739 — 1812), care a analizat în această dizertație vreo 30 de lucrări legate de postulatul paralelelor, a subliniat îndeosebi ingeniozitatea dovedită de Saccheri. Lucrarea lui Saccheri este citată și în altă dizertație publicată în 1824 : *Despre istoria triunghiurilor*, scrisă

de C.F.A. Jacobi (1795 — 1855), apoi în alte lucrări apărute în 1862 și 1875. În 1889, matematicianul italian Eugenio Beltrami (1835 — 1900) a insistat asupra faptului că Saccheri trebuie privit ca un precursor al lui Lobacevski.

40. *Teoria liniilor paralele* este formată din trei părți diferite. În prima parte se discută, mai ales din punct de vedere filozofic, ceea ce trebuie să se înțeleagă prin demonstrarea postulatului al V-lea, anume, oare să fie dedus ca o teoremă numai pe baza celorlalte postulate, sau să se introducă și alte postulate suplimentare ? În partea a doua se amintesc încercările făcute pentru reducerea postulatului paralelelor la alte propoziții echivalente și se discută aceste posibilități. Partea a treia cuprinde și analizează teoria originală a lui Lambert.

41. Numind A aria unui triunghi, S suma unghiurilor lui și C o constantă, teorema lui Lambert, care exprimă că aria triunghiului este proporțională cu diferența dintre două unghiuri drepte și suma unghiurilor acelui triunghi, se scrie astfel : $A = C(\pi - S)$. Din această formulă rezultă că :

1) Aria unui triunghi este cu atît mai mare cu cît suma unghiurilor este mai mică și că ea are o valoare maximă atunci cînd $S=0$, anume $A = \pi C$. Un asemenea triunghi de arie maximă, arbitrar de mare, este însă echivalent cu valabilitatea postulatului lui Euclid.

2) Dacă presupunem că în toate triunghiurile suma unghiurilor lor este aceeași, din formulă rezultă că ele ar avea și aceeași arie ; or, în această ipoteză, *nu există triunghiuri asemenea*. Se regăsește astfel echivalența stabilită de J. Wallis între postulatul paralelelor și existența triunghiurilor asemenea.

42. Într-o conversație dintre Lagrange și geometrul francez J.B.Biot (1774 — 1862), Lagrange a observat că trigonometria sferică este independentă de postulatul paralelelor.

43. *Elementele de geometrie* scrise de Legendre au avut o influență considerabilă pentru dezvoltarea învățămîntului geometriei în școlile cu caracter mediu și superior. Aceasta întrucît potrivit cu părerile exprimate de d'Alembert, Legendre a căutat să adapteze *Elementele* lui Euclid timpului modern. Altfel spus, păstrînd rigurozitatea logică a demonstrațiilor, el a căutat să transcrie aceste demonstrații într-un stil ușor de urmărit, eliminînd balastul adunat prin dezvoltarea ulterioară a calculului algebric etc. Aceste *Elemente* au avut numeroase ediții, începînd din 1794, ediții ce au fost revăzute și mereu transformate de autor pînă la moartea

lui, în 1833. După această dată, ele au apărut în continuare așa cum au rămas la ultima ediție. Aceste manuale au fost traduse în multe limbi și, bineînțeles, și în limba română. Prima traducere a fost făcută de Petrache Poenaru în 1837.

44. Iată cîteva dintre teoremele echivalente cu postulatul al V-lea: „Există două drepte echidistante" (Geminus și Posidoniu); „Există o pereche de triunghiuri asemenea" (Wallis, Saccheri, Laplace); „Există cel puțin un dreptunghi, adică un patrulater cu 4 unghiuri drepte" (Saccheri), „Suma unghiurilor unui triunghi este egală cu două unghiuri drepte" (Legendre); „Există triunghiuri cu arie oricît de mare" (Gauss); „Prin trei puncte necoliniare trece un cerc" (Farkas Bolyai și Legendre) etc. Începînd din 1795, postulatul al V-lea a căpătat o formulare nouă, azi cel mai mult folosită, și anume: „Printr-un punct nu se poate duce decît o singură paralelă la o dreaptă dată dintr-un plan". Uneori se mai folosește încă și formula: „Două drepte ce se intersectează nu pot fi amîndouă paralele cu o aceeași dreaptă". Ambele expresii se datoresc fizicianului și matematicianului scoțian John Playfair (1748—1819).

45. Farkas Bolyai fusese trimis în 1797 la studii în Germania ca însoțitorul fiului baronului Kemény din Cluj, care-l luase sub protecția lui de cînd avea 9 ani. Era considerat ca un „copil minune" și se împrietenise cu fiul baronului, Simon Kemény, de aceeași vîrstă cu el. După ce au făcut un semestru la Jena, au plecat amîndoi la Göttingen unde, în casa profesorului K. Seyffer (1762 — 1822) l-a cunoscut pe Gauss, care era student acolo din 1795. Amîndoi erau săraci, dar plini de entuziasm pentru matematici. Aceasta i-a făcut să se lege „frați de cruce sub semnul adevărului". În timpul vacanțelor, cînd Gauss se ducea acasă la Braunschweig, iar Bolyai rămînea în Göttingen, cei doi prieteni își scriau scrisori și acest lucru a continuat și după despărțirea lor definitivă din 5 iunie 1799, cînd Bolyai s-a întors împreună cu Simon în Transilvania. În urma neînțelegerilor dintre F. Bolyai și tatăl lui, care avea o proprietate la Domald, Bolyai s-a întors la Cluj în postul de preceptor al altui fiu, mai mic, al baronului Kemény, în vîrstă de 14 ani. La un bal dat de baron, a cunoscut-o pe Suzana Benkő și curînd după aceea i-a devenit profesor de muzică, căci la Göttingen, pe lîngă matematici, învățase să cînte și la vioară. În septembrie 1801 s-au căsătorit și, după căsătorie, s-au mutat în casa părintească din Domald. János s-a născut la Cluj, dar după aceea părinții s-au întors la Domald și au locuit acolo pînă la începutul anului 1804, cînd s-au mutat la Tîrgu Mureș, unde Farkas Bolyai fusese numit profesor.

46. Odată cu venirea la Tîrgu Mureș au început și grijile care au alungat fericirea din căsnicia ce se arătase plină de strălucire. Cu leafa ce o primea, era imposibil să-și întrețină familia, așa că, pe lîngă timpul ce-l destina pregătirii cursurilor, Farkas Bolyai trebuia să-și mai caute alte surse de venit suplimentare. A început prin a scrie piese de teatru. A publicat astfel cinci tragedii:

1) *Pausanias* sau *Jertfa ambiției*, 2) *Mahomed* sau *Victoria gloriei asupra dragostei*, 3) *Simon Kemény* sau *Jertfa dragostei de patrie*, 4) *Victoria virtuții asupra dragostei*, 5) *Victoria dragostei asupra virtuții*.

Din această cauză Suzana s-a trezit dintr-o dată singură și părăsită. Copilul era salvarea ei sufletească.

47. Farkas Bolyai suferea de o boală de ochi, rămasă în urma unei explozii de praf de pușcă, încercînd niște experiențe împreună cu prietenul său Simon Kemény, pe cînd erau amîndoi elevi. În timpul studenției lui János, boala de ochi a tatălui său se agravase atît de tare că nu se mai putea duce să-și țină cursurile. Atunci fiul s-a oferit să predea el cursurile la colegiu în locul lui Farkas Bolyai. În noua lui calitate, a avut mult succes, fiind lăudat de însuși directorul școlii, care a venit în control.

48. E vorba de Paul Bondor, pe care l-a cunoscut pe cînd era la Cluj, în casa baronului Kemény. El se ocupa cu problemele de literatură și artă din acest oraș, fiind controlor al Casei provinciale Transilvania, și tot el l-a încurajat pe Bolyai să scrie piese de teatru.

49. Farkas Bolyai făcea aluzie la un concert dat la Tîrgu Mureș unde vioara întîi era ținută de un tînăr german, iar a doua de János. Compozitorul, care era orb și asista la spectacol, nu era deloc mulțumit de prima vioară. Dintr-o dată, primului violonist i-a plesnit o coardă și atunci acesta a schimbat notele cu János care i-a luat locul. Deși el nu citise mai înainte partitura acestuia, a cîntat așa de bine încît compozitorul, care nu știa nimic din cele ce se întîmplase, a început a aplauda strigînd: „Bravo, acum vioara întîi se aude și stăpînește!"

50. Farkas Bolyai cunoștea Academia din Viena, fiindcă atunci cînd a plecat la studii în Germania cu Simon, el s-a îmbolnăvit pe drum și a fost nevoit să rămînă în spitalul din Viena. Cînd a ieșit din spital, era în Viena fără bani și, întîlnindu-se cu un cunoscut, acela l-a sfătuit să se înscrie la Academia tehnică. El ar fi făcut-o bucuros, dacă nu primea scrisoarea lui Simon care-l chema la Jena, unde plecase el.

51. În muzeul Bolyai din Tîrgu Mureş se află una dintre sobele construite de Farkas Bolyai. Printre alte invenţii ale lui Bolyai se cunoaşte şi o drezină pe care a construit-o dintr-o caleaşcă veche, cu care se plimba prin oraş.

52. În aceeaşi scrisoare, Bolyai îi mai arăta lui Paul Bondor că primise în dar 250 de guldeni pentru János, de la contele Kendeffi, bani foarte binevenîţi, căci generalul îl chemase pe feciorul lui ca să-l „înştiinţeze că i-ar face plăcere să ia parte la cursurile de călărie dacă părinţii lui ar face o mică jertfă" şi i-ar cumpăra un cal.

53. În scrisoare, Farkas Bolyai scria : „După dorinţa ei, am dus-o la Domald şi am îngropat-o în locul pe care mi l-a indicat ea... în grădina mea... Pe cînd era toată lumea ocupată acolo, mi-a venit în minte să alătur portretul fiului său lîngă al ei şi acum am făcut un tablou după portretul ei de faţă ţinîndu-şi fiul în braţe şi această fecioară cu pruncul este icoana în faţa căreia mă închin adesea cu lacrimi".

54. Mulţumindu-i contelui Adam Kendeffi pentru darurile lui, i-a scris : „După ştirile primite, băiatul meu a terminat cu laudă Academia, astfel că i s-a dat „port d'épée" şi peste două săptămîni a fost trimis la Timişoara, de unde se ceruse un inginer priceput. Acolo va sta mai mulţi ani, fiind însărcinat cu o muncă foarte importantă".

55. János Bolyai era aşa de preocupat de problema paralelelor încît nu dădea nici o atenţie serviciului pentru care fusese calificat. Şi dacă vreun ofiţer căuta să-i atragă atenţia asupra acestui lucru, discuţia se sfîrşea cu o provocare la duel, din care János Bolyai ieşea totdeauna învingător. Se spune că într-o zi a avut nu mai puţin de 13 dueluri, cerînd însă, după fiecare duel, să i se permită să cînte la vioară.

56. Avea mai întîi nevoie de concediu, dar datorită comportării lui în garnizoana din Timişoara, acest concediu nu putea fi aprobat prea uşor. Apoi avea nevoie de bani de drum. Deoarece pe atunci nu existau trenuri, iarna drumul trebuia făcut cu sania.

57. Farkas Bolyai nu şi-a anunţat feciorul că s-a însurat din nou. Astfel, János a aflat abia cînd a ajuns acasă şi a văzut pe noua soţie, Tereza Nagy, care era numai cu 5 ani mai în vîrstă decît János. Fusese educată la Braşov, cînta la harfă şi avea o voce frumoasă. Dintr-o scrisoare a lui Farkas Bolyai către P. Bondor, din 22 februarie 1825, aflăm

că el s-a însurat la începutul anului, că János a venit acasă și că „va sta până la 11 martie când va pleca, probabil pentru totdeauna — e aproape ca o moarte". Dintr-o altă scrisoare, din aprilie, aflăm că s-a împăcat cu feciorul lui și acesta i-a scris două scrisori din Timișoara. Împăcarea însă nu va fi decît pe plan științific, altfel János nu-i va ierta această căsătorie care, considera el, i-a răpit dragostea tatălui său.

58. În fișa de activitate a lui János Bolyai se arată că în 10 aprilie 1826 sublocotenentul Bolyai a fost transferat la fortăreața Arad. Dar și aici a continuat să se ocupe numai de teoria paralelelor, căci în raportul din 15.XII.1826, care cuprindea propunerile de avansare în corpul de geniu, se specifică : „Sublocotenentul Bolyai nu merită avansarea, fiindcă de cîțiva ani a devenit un ofițer foarte neglijent și nici acum, după mutare, nu dă semne că s-a îndreptat". Dar după ce și-a terminat lucrarea și a trimis-o tatălui său, János Bolyai și-a schimbat atitudinea în serviciu. În noul raport întocmit de direcția fortificațiilor din Arad, din septembrie 1827, se propunea avansarea în grad de locotenent a inginerului János Bolyai, „care și-a îmbunătățit mult conduita sa, mai ales de la 31 martie 1827". Din 8 septembrie el devine locotenent, dar i se pune în vedere că „viitoarea avansare va depinde numai de buna lui conduită". Însă nici acum activitatea lui János Bolyai nu se va menține mult timp satisfăcătoare. În 25 august 1830, Direcția fortificațiilor din Arad propune să fie transferat : „Inginerul locotenent von Bolyai în prezent s-a îmbolnăvit din nou de febră... În interesul serviciului ar trebui transferat într-o altă regiune, căci cea mai mare parte a anului este bolnav". Ca răspuns la această adresă, Bolyai este transferat, pe ziua de 1 decembrie 1830, de la Arad la Lemberg.

59. În statele de serviciu din Lemberg, numele locotenentului Bolyai figurează din 8 decembrie 1830 până la 11 mai 1832. În Lemberg a avut norocul să aibă ca ofițer comandant pe locotenent-colonelul Zimmer, care l-a înțeles și apreciat la adevăr ața valoare, în ciuda raportului în care era caracterizat ca : „un irascibil, gata să provoace la duel pe oricine pentru orice i se năzare, pe deasupra bolnav de ipohondrie, făcînd mereu febră, așadar dînd un slab randament în serviciu". În raportul de la sfîrșitul anului 1831, Zimmer scria : „Mai întîi nu-i adevărat că lt. Bolyai este un om certăreț, din contra, este un om obosit și blajin... Pare să aibă excelente aptitudini pentru probleme de matematici superioare, de aceea, ar fi mai indicat pentru cariera de profesor decît pentru un serviciu la direcția regimentului de geniu. Pentru asemenea serviciu el este prea slab. De asemenea, pare să aibă cunoștințe bune de istorie, geografie și filozofie." În 29 ianuarie 1832

el îi face propunerea pentru avansarea la gradul de căpitan, arătînd că „locotenentul amintit este stăpînit de o dragoste entuziastă pentru matematicile superioare şi a tipărit o lucrare care continuă pe aceea a tatălui său şi, după părerea sa, va face epocă. Care este adevărata valoare a acestei lucrări eu nu pot aprecia şi nici nu există nimeni competent în Lemberg care să o poată face". Mai departe, în raport se arată că s-ar putea obţine poate referinţe de la căpitanul Wolter, căruia i-a fost trimis un extras din această lucrare. Căpitanul Johann Wolter von Eckwehr fusese profesorul lui de matematici la Academia militară din Viena. Acesta i-a răspuns, mulţumindu-i pentru lucrarea trimisă, dar fără a face aprecieri directe asupra lucrării, el le exprimă într-o formă deosebită, comparînd relativitatea teoriilor matematice cu relativitatea imaginilor unui obiect privit în perspectivă din diferite puncte de vedere.

60. Pipa era simbolul legăturii lor de prietenie. Cînd s-au despărţit pentru totdeauna, Gauss era la Braunschweig şi Bolyai a pornit din Göttingen înspre Clausthal, unde s-a întîlnit, la apusul soarelui, cu Gauss care venea din direcţia opusă. Aici au fumat alături, în tăcere, *ultima pipă*, fiecare avînd-o în dar, unul de la celălalt.

61. Locotenent-colonelul Zimmer, deşi i-a înţeles bine tulburarea, nu a mai putut justifica inactivitatea lui, ce revolta pe ceilalţi ofiţeri. Singura soluţie era să-i ceară mutarea în altă garnizoană. În 11 mai 1832, el a primit ordinul de transferare la fortificaţiile din Olmütz. A părăsit Lembergul a doua zi, dar, pe drum, caii au răsturnat căruţa într-un şanţ, iar el s-a lovit la cap, şi-a pierdut cunoştinţa şi a zăcut în spital vreo două luni. Dar nici acest accident nu a fost în stare să potolească desperarea ce pusese stăpînire pe el, ca urmare a scrisorii primite de la Gauss. Nu-şi putea îndeplini serviciul şi în 8 august 1832 a înaintat o cerere de concediu la care a anexat lucrarea, tradusă parţial în limba germană, precum şi o copie după scrisoarea lui Gauss pe care o comentează în favoarea lui. Cînd această cerere, cu totul neobişnuită, a ajuns la forurile superioare, se pare că ea a stîrnit un oarecare interes, ţinîndu-se seama, desigur, şi de raportul de la sfîrşitul anului 1831 făcut de Zimmer. S-a cerut atunci să se trimită informaţii despre *valoarea lucrării lui Bolyai* şi despre *seriozitatea afirmaţiilor sale*. Lucrarea a fost trimisă referenţilor să o cerceteze şi să facă referat asupra ei. Desigur că nimeni nu s-a putut pronunţa şi astfel cererea i-a fost respinsă ca *neîntemeiată* şi i s-a adresat *cea mai grea mustrare scrisă pentru neseriozitate*! Mai mult, a fost sugerată părerea să i se facă o examinare medicală, ca să poată fi trecut la pensie.

62. În Grecia antică se afirma, în glumă, că locuitorii Beoției erau oamenii cei mai mărginiți. Gauss folosește această expresie ca să denumească astfel pe matematicienii tradiționaliști.

63. Gauss a avut și față de matematicianul norvegian Niels H. Abel (1802—1829) o atitudine puțin prietenoasă. În 1824, ocupîndu-se de rezolvarea ecuațiilor de gradul al V-lea, Abel a dat soluția definitivă a problemei, într-un articol care a devenit mai tîrziu clasic, anume: „Memoriu asupra ecuațiilor algebrice în care se demonstrează imposibilitatea rezolvării ecuației generale de gradul al V-lea". Acest memoriu a fost dat lui Gauss ca să-și spună părerea, dar Gauss nu a dat nici un răspuns, iar memoriul lui Abel a fost găsit, după moartea lui Gauss, printre hîrtiile lui. Desigur că această atitudine l-a îndurerat mult pe tînărul matematician, care spera să fie remarcat de către Gauss. Din această cauză, memoriul său nu a fost publicat decît mult mai tîrziu. Peste doi ani, fiind la Berlin, Abel scria profesorului său Holmboe: „Voi rămîne la Berlin pînă la sfîrșitul lui februarie sau martie, apoi mă voi duce la Göttingen... nu din cauza lui Gauss, despre care se spune că este insuportabil de orgolios, ci din cauza bibliotecii". În 1827, Abel a trimis o altă lucrare importantă de a sa matematicianului A.L. Crelle (1780—1855), care edita din 1826 renumita revistă de matematică „Jurnal pentru matematicile pure și aplicate", spre a-i fi publicată. Crelle a trimis-o lui Gauss, care i-a răspuns că aceste idei le-a avut de aproape 30 de ani, dar „alte ocupații m-au împiedicat să elaborez aceste cercetări. Abel a anticipat asupra unei treimi din rezultatele mele. El a pornit pe un drum pe care l-am urmat din 1798. Nu sînt deci surprins că în general a obținut aceleași rezultate. Dar cum el a dovedit talent și eleganță în deducerile sale, mă văd dezlegat de necesitatea de a mai studia propriile mele rezultate". Aceste rînduri au provocat multă supărare matematicienilor ce l-au cunoscut, cu atît mai mult cu cît alt matematician, C.G. Jacobi (1804—1851), care lucra și el în același domeniu, scria despre lucrarea lui Abel următoarele: „Lucrarea lui Abel este mai presus de orice laudă și totodată depășește propria mea lucrare".

64. Un caz în care s-a stabilit dreptatea celor afirmate de Gauss, la multă vreme după ce eroii acestei întîmplări nu mai erau în viață, îl constituie discuția despre prioritate la descoperirea metodei celor mai mici pătrate. În tratatul său de mecanică cerească, *Teoria mișcării corpurilor cerești*, pe care Gauss l-a publicat în 1809, cînd a aplicat metoda celor mai mici pătrate, a afirmat că el este autorul acestui procedeu, pe atunci foarte modern, de a calcula erorile observațiilor astronomice. Însă cel ce a publicat pentru prima oară, încă în 1806, această metodă era matemati-

cianul francez A.M. Legendre. Citind cele afirmate de Gauss, Legendre s-a supărat și i-a scris lui Gauss acuzîndu-l de necinste și arătînd că un savant așa de bogat în descoperiri ca el ar fi putut avea decența de a nu-și însuși prioritatea acestei metode pe care Legendre o considera drept copilul lui ! Gauss a afirmat că el a stabilit metoda cu cel puțin 10 ani mai înainte decît Legendre. Public, n-a vrut să o dovedească, deși ar fi putut. Numai față de un prieten a făcut-o scrîind : „Am comunicat această metodă în anul 1802 lui Olbers și dacă Legendre se îndoiește, nu are decît să ceară manuscrisul lui Olbers". Dealtfel, Gauss a prevăzut această izbucnire a lui Legendre chiar din anul 1806, cînd, într-o scrisoare pe care a trimis-o lui Schumacher, îi spunea : „Se pare că așa mi-e soarta, ca să mă aflu în concurență cu Legendre în aproape toate lucrările mele teoretice, în aritmetica superioară, în cercetările privind funcțiile transcendente legate de aflarea lungimii unui arc de curbă, în fundamentele geometriei și acum din nou, în această metodă a celor mai mici pătrate ... folosită de asemenea și în lucrările lui Legendre unde este tratată, foarte elegant". De-abia prin publicarea hîrtiilor rămase de la Gauss și mai ales a corespondenței sale s-a putut constata că, în adevăr, Gauss era în drepturile lui de a revendica prioritatea.

65. Acest jurnal intitulat de Gauss „Notizenjournal" a fost dat, în 1898, de către un *nepot* al lui Gauss, Societății matematice din Göttingen pentru a fi examinat. El a fost publicat în 1917 în volumul X al *Operelor complete*. Enunțurile, foarte scurte, dovedesc bogăția și varietatea subiectelor care l-au preocupat pe Gauss, ce se considera el însuși un *matematician complet*, în această denumire fiind pe atunci cuprinse și problemele de fizică-matematică. El și-a ales ca emblemă un arbore cu fructe rare, sub care a scris deviza : „Pauca, sed matura" (puține, dar coapte). A doua deviză era formată din următoarele versuri luate din *Regele Lear* al lui Shakespeare : „Natură, tu ești zeița mea, de legile tale este legată slujba mea".

66. Această corespondență nu l-a împiedicat însă pe Farkas Bolyai să-i scrie, în 20 aprilie 1835, următoarele lui Gauss : „Am îndurat multe. Dar cea mai puternică lovitură, și care mi-a sfîșiat inima, este nerecunoștința fiului meu, pentru care am făcut așa de mult. De mulți ani (dar mai ales acum, în ultimii ani) sînt martirul lui. De cîțiva ani am fost nevoit să-l alung din cercul familiei. Cel mai rău este că dușmănește pe fratele său și, cînd am să mor, orfanul va cădea în ghearele lui. Pe lîngă talentele sale, este un soldat înspăimîntător de iute și de răzbunător și, pentru orice nimic, devine neînduplecat. E certăreț și în general de neînduplecat. Cîte-

odată îmi pare că e Franz Mohr sau nebun (cum a fost mama lui). Totuşi e posibil ca, după o puternică efervescenţă, să-şi revină, dar pînă atunci sînt copleşit de suferinţă". Despre atitudinea lui ca tată nu găseşte nimic de adăugat!

67. János Bolyai a semnat lucrarea prin deviza: „Fructus nonnisi maturi decerpendi", adică „Numai fructele coapte trebuie culese". Este interesant de observat corespondenţa dintre deviza aceasta şi aceea pe care şi-o alesese Gauss în tinereţe şi a pus-o pe caietul său de notiţe. Acest lucru nu avea să-l cunoască nimeni pînă după moartea lui Gauss.

68. Peste 4 ani, în 1852, Rozalia şi-a luat copiii şi a plecat din Tîrgu Mureş. János a semnat un act prin care i-a dăruit casa ca să aibă cu ce îngriji copiii. El s-a mutat atunci într-un bordei de lîngă cimitir, unde a fost îngrijit pînă la moarte de către o româncă, pe nume Iuliana Sot. A murit în 27 ianuarie 1860, după o suferinţă de 16 luni (în noiembrie 1859 i-a scris fratelui său Gregor, că de 15 luni are dureri cumplit de ascuţite). A fost condus la groapă numai de 3 oameni. La dorinţa lui, manuscrisele au fost depuse, după ce au fost examinate ca să nu cuprindă vreun secret militar, la Biblioteca colegiului din Tîrgu Mureş.

69. Amîndouă scrisorile încep cu tonul obişnuit al destăinuirilor sentimentale, iar scopul apare abia în ultimele rînduri. După ce Farkas Bolyai se plînge iar de fiul său cel mare, cu care a avut chiar „şi un proces", din care cauză nu a mai putut respira aerul pur din „Regiunile Adevărului", continuă astfel: „Ziua s-a sfîrşit. Tu ţi-ai primit răsplata meritată, a mea este numai liniştea interioară, fără vreo altă răsplată, pentru că am luptat singur cu soarta sub steagul adevărului ca să-i rămîn credincios... Pentru noi amîndoi se joacă acum ultimul act al dramei pămînteşti. Pe tine însă, după ce va cădea cortina, te va aplauda veşnicia, eu voi fi mulţumit dacă ... nici o piatră nu va mai vorbi despre mine". Gauss începe la fel de sentimental: „Scumpul meu bătrîn prieten. Cu o emoţie plină de melancolie am primit scrisoarea ta ... E adevărat, viaţa mea a fost împodobită cu multe lucruri pe care lumea le consideră demne de invidiat. Dar credemă, dragă Bolyai, partea amară a vieţii, cel puţin a aceleia care a fost a mea, care trece ca un fir roşu prin ea şi care la o vîrstă înaintată îţi stă mereu înainte dezarmîndu-te, nu-i compensată nici a suta parte de plăcere. Admit că pentru altul, aceeaşi soartă care mie mi-a devenit şi încă îmi este aşa de grea, ar fi fost mult mai uşoară ... E adevărat însă că conştiinţa deşertăciunii vieţii, pe care o simte cea mai mare parte din omenire la apropierea ţelului, mie îmi pare ca cea mai puternică garanţie a unei

viitoare Metamorfoze mai frumoase. Cu aceasta, scumpul meu prieten să ne consolăm şi să căutăm liniştea necesară ca să putem răbda pînă la sfîrşit. Eliberarea ce se apropie îl face pe bătrîn viteaz, spunea Seneca".

70. La 1 februarie 1841, Gauss scria unui elev, astronomul J.F. Encke: „Am început să citesc destul de curent rusește și îmi face o mare plăcere. Dl. Knore mi-a trimis o mică lucrare a lui Lobacevski (din Kazan) scrisă în rusește. Această lucrare, ca și o carte în limba germană, despre paralele... au trezit în mine dorința de a citi cea mai mare parte a lucrărilor acestui ingenios matematician. După cîte mi-a spus Knore, *Lucrările Universității din Kazan*, publicate în rusește, conțin o mulțime dintre lucrările lui".

71. Ca și Bolyai, Lobacevski a presupus că prin punctul C exterior dreptei AB, trec două drepte paralele, anume $E'CE$ și $F'CF$, ambele situate în planul ABC (fig. 30). De aici rezultă că toate dreptele ce trec prin C și sînt situate în interiorul unghiului $E'CF'$ (sau ECF) nu întîlnesc dreapta AB. Aceste drepte, în număr infinit, au fost numite de Lobacevski, *drepte divergente* spre deosebire de toate celelalte care trec prin C și sînt *convergente*, adică întîlnesc dreapta AB. Printre dreptele divergente se află și dreapta TCT' paralelă cu AB *în sens euclidian*. Ducînd perpendiculara CD și considerînd dreptele EE' și FF' orientate, cele două paralele EE' și FF' se deosebesc între ele, în modul următor: paralela $E'E$ care face cu perpendiculara CD unghiul ascuțit α de partea lui E este paralelă cu AB *în sensul lui* AB, pe cînd paralela $F'F$ care face unghiul ascuțit α în direcția F' este *paralelă cu* AB *în sensul* BA. Lobacevski a numit unghiul α, unghiul de *paralelism din punctul* C, fiindcă, spre deosebire de geometria euclidiană, în care unghiul de paralelism este drept și nu depinde de poziția punctului C pe perpendiculara CD, în geometria lui Lobacevski,

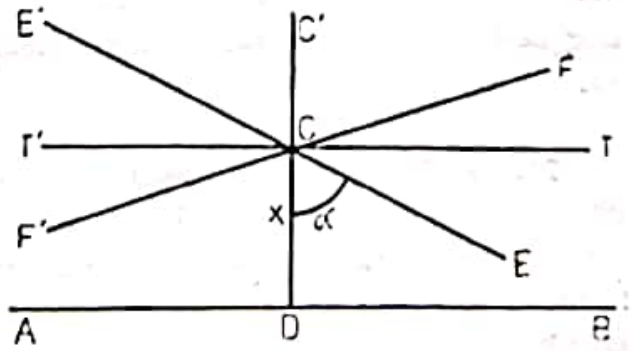


Fig. 30

acest unghi α depinde de poziția punctului C pe dreapta CD. Anume, numind x distanța CD și notînd cu α unghiul de paralelism, acesta este funcție de x adică avem: $\alpha = \pi(x)$. De aici rezultă că, dacă în geometria

euclidiană un triunghi se caracterizează prin cele trei laturi a, b, c și cele trei unghiuri A, B, C, în geometria lui Lobacevski elementele caracteristice ale unui triunghi plan sînt cele trei unghiuri dintre laturi A, B, C și cele trei unghiuri de paralelism ale laturilor $\pi(a)$, $\pi(b)$, $\pi(c)$. Deoarece

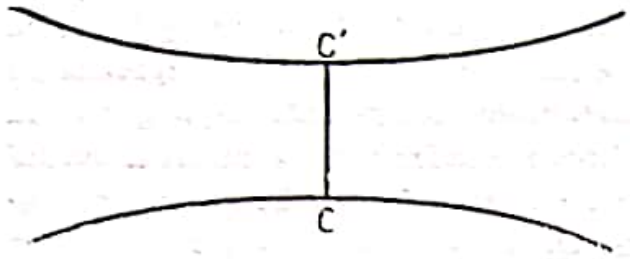


Fig. 31

unghiul de paralelism depinde de distanța punctului C față de AB, înseamnă că dacă pe perpendiculara CD se consideră un alt punct C' situat la o distanță $C'D = y$ de AB și se duc paralelele prin C' la AB, rezultă că dreptele divergente dintr-un fascicul au o perpendiculară comună cu dreptele divergente din celălalt fascicul și această perpendiculară comună reprezintă cea mai scurtă distanță dintre ele. De o parte și de alta a acestei perpendiculare comune, două drepte divergente față de AB se îndepărtează nedefinit una de alta *în ambele sensuri*. Prin aceasta, două drepte divergente față de AB, care au puncte de plecare diferite se deosebesc de paralelele EE' și FF' : paralela EE' se apropie nedefinit de AB în direcția punctului B și se depărtează de ea în direcția punctului A, iar FF' se apropie de AB asimptotic în direcția punctului B.

72. Acest lucru va fi mai bine înțeles după ce se va citi capitolul următor și notele.

73. În 1948, matematicianul sovietic A. Kolgomorov a arătat netemeinicia afirmațiilor lui Ostrogradski, restabilind astfel adevărurile găsite de Lobacevski în legătură cu cele două integrale prezentate în lucrarea sa.

74. Pamfletul amintit a apărut în revistele „Fiii patriei" și „Arhivele din Nord", din anul 1834. Iată ce scria Lobacevski despre acest articol: „Dacă autorul criticii mele *Principiile geometriei* care a apărut în 1834, în nr. 41 din „Fiii Patriei", a ajuns la o concluzie analoagă[1] față de integralele mele, aceasta se datorește fie faptului că este complet incompetent să le judece, fie, în cazul cel mai bun, că în graba lui de a judeca nu a putut

[1] Cu aceea a lui Ostrogradski din raportul amintit.

distinge cazul în care o integrală poate avea valori deosebite şi le-a calificat drept *absurde*."

75. Lobacevski a pus la baza geometriei, ce voia să o construiască, acţiunile fundamentale pe care se bazează astăzi *topologia*, anume acelea de *contact*, *aderenţă*, *vecinătate* şi de *secţionare* a unui corp. După el, numai corpurile există în natură, iar noţiunile de suprafaţă, linie şi punct trebuie considerate doar ca abstracţii ce rezultă din contactul sau secţionarea corpurilor. „Două corpuri ce se află în contact", scria el, „formează un singur corp geometric şi invers, orice corp este împărţit în altele două, printr-o secţiune în el ... Putem să ne reprezentăm toate corpurile din natură ca fiind părţile unui ansamblu numit spaţiu".

76. Nici traducerea făcută în limba germană a *Cercetărilor geometrice* nu a fost înţeleasă şi primită cu bunăvoinţă, dacă-l excepţăm pe Gauss. În *Repertoriul bibliografic german* din 1840 a apărut următoarea recenzie, iscălită prin numărul „140" : „După autor, se poate admite, fără a ajunge la o contradicţie, posibilitatea de a duce printr-un punct dat la o dreaptă dată două paralele ce nu se confundă şi atunci pot trece prin acelaşi punct, între aceste două paralele, drepte care nu întîlnesc dreapta dată fără a fi însă paralele cu ea, deşi toate acestea sînt coplanare. Pe această bază, autorul pretinde să construiască propria sa ştiinţă pe care o numeşte *Geometrie imaginară*. Fundamentele acestei ştiinţe sînt expuse în broşura de faţă ; totuşi, acest principiu şi propoziţia care decurge din el : „cu cît prelungim paralelele în sensul paralelismului lor, cu atît ele se apropie una de alta", caracterizează destul de bine această operă restrînsă şi scuteşte pe redactor de necesitatea de a continua aprecierea ei". Despre această critică, Gauss scria lui Encke în scrisoarea citată din 1841 : „repertoriul lui Gersdorf conţine o notă complet stupidă", iar în altă scrisoare, adresată lui Gerling în 1844 : „Această recenzie trebuie să facă, oricărei persoane competente, impresia că a fost scrisă de un ignorant".

77. Subiectul tezei lui Riemann era : „Principiile unei teorii generale ale funcţiilor de variabilă complexă". iată cîteva din aprecierile lui Gauss despre această lucrare : „Teza prezentată de domnul Riemann dă dovadă de cercetările serioase şi profunde ale autorului. Ea ne arată un spirit creator activ, cu adevărat matematic şi de o strălucitoare originalitate. Prezentarea este clară, concisă şi uneori foarte frumoasă...".

78. Tot în această scrisoare, Riemann arăta şi ce greutăţi a avut de întîmpinat în legătură cu fixarea datei conferinţei : „Gauss este grav bolnav şi doctorii de tem de un sfîrşit fatal ... el mi-a cerut să aştept pînă

în luna august, sperînd să se restabilească. Pe urmă s-a decis pentru 10 iunie, la ora 11, așa că simbătă am terminat-o cu bine".

Peste 8 luni, în 23 februarie 1855, Gauss a murit.

79. Gaspard Monge (1746—1818) a dovedit, de mic, talent de geometru și de tehnician. Se spune că la 14 ani a inventat o pompă contra incendiilor. Întrebat cum de a putut-o face, fără să aibă nici un model, ar fi răspuns: „Am folosit două mijloace care nu dau greș: perseverența în încercările mele și degetele care mi-au tradus gîndurile cu o precizie geometrică." La 16 ani, după ce și-a construit singur aparatele de topografie, a ridicat din proprie inițiativă o hartă a orașului natal Beaune. Un ofițer, văzînd acest plan, l-a îndemnat să intre în cadrele armatei. A făcut-o și cu toate că a fost cel mai bun din promoția lui, nu a putut obține gradul de ofițer de geniu, fiindcă nu era de origine nobilă. Repartizat să lucreze la fortificații, Monge a descoperit principiile geometriei descriptive. Cînd au fost recunoscute avantajele acestei metode pentru problemele legate de armată, el a fost ridicat la rangul de profesor la școala de geniu și pus să jure că nu va destăinui nimic din această metodă, considerată timp de 15 ani ca un secret militar. Abia în 1794 a avut dreptul să predea cursul la Școala normală superioară din Paris. Din 1796, el a devenit unul dintre prietenii cei mai intimi ai lui Napoleon și a luat parte la campaniile lui din Italia și Egipt. Dar Monge a fost tot așa de inventiv și în altă ramură a geometriei, anume în geometria infinitezimală. Cartea sa *Aplicațiile analizei la geometrie*, apărută în 1795, este prima lucrare în care se îmbină armonios metodele geometrice, analitice și infinitezimale (ultimele fiind cele folosite în calculul diferențial și integral), pentru a rezolva probleme despre proprietățile și aplicațiile practice ale curbelor din spațiu, despre curbura și torsiunea lor, precum și despre studiul diferitelor familii de suprafețe exprimate prin ecuațiile lor diferențiale. El a studiat, mai ales, problemele puse de fizică, mecanică, astronomie sau tehnică, care nu se puteau rezolva prin metodele algebrei, ci cereau ajutorul analizei infinitezimale.

80. În cazul suprafeței pămîntești, latitudinea și longitudinea sînt coordonate curbilinii; ele au caracter intrinsec, adică nu depind de poziția Pămîntului în spațiul înconjurător, raportat, de exemplu, la un sistem de coordonate cartezian care ar avea originea în Soare. Dacă ne referim la o sferă de rază unu, atunci ecuațiile parametrice ale sferei sînt $x = \cos u \cdot \cos v$; $y = \cos u \cdot \sin v$; $z = \sin u$. Liniile parametrice $u = \text{const}$ reprezintă cercurile paralele. În adevăr, punînd $\cos u = m$ și $\sin u = n$, ridicînd primele două ecuații la pătrat și adunînd, avem:

$x^2 + y^2 = m^2$ şi $z = n$. Aceste două ecuaţii sînt ecuaţiile unui cerc obţinut prin intersecţia sferei cu un plan paralel cu ecuatorul la distanţa $z = n$, adică sînt cercurile paralele. Liniile parametrice $v = \text{const.}$ reprezintă

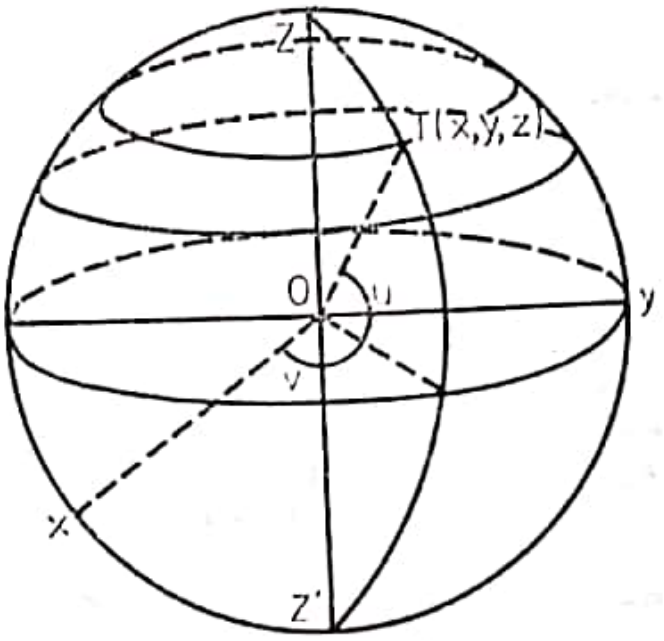


Fig. 32

cercurile meridiane. Se poate stabili aceasta punînd $\cos v = r$ şi $\sin v = t$ (fig. 32). Prin împărţire, primele două ecuaţii dau $x/y = r/t = \text{const.}$ Se obţine astfel ecuaţia unui plan care trece prin axa Oz şi taie sfera după cercurile paralele.

81. Calculîndu-se valoarea elementului de arc ds^2 în cazul sferei se obţine:

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u\, dv^2 .$$

Rezultă că $E = 1$, $F = 0$ şi $G = \cos^2 u$.

Expresia poartă numele de prima formă pătratică diferenţială, ca să se deosebească de alte două forme legate de suprafaţă, dar despre care nu este cazul să se discute aici.

82. Procedeul folosit de Gauss pentru a defini curbura unei suprafeţe într-un punct al ei se aseamănă cu acela întrebuinţat pentru măsurarea curburii unei curbe plane într-un punct al ei. Anume, se consideră un punct A pe suprafaţă şi se înconjoară cu o curbă închisă şi în fiecare punct al acestei curbe se duc normalele la suprafaţă. Ca să exprime curbura suprafeţei în A, Gauss foloseşte divergenţa acestor normale astfel: Se consideră o sferă de rază unu şi pe ea imaginea punctului A obţinută du-

cînd raza paralelă cu normala la suprafață în A. Apoi, din centrul sferei se duc raze paralele cu normalele la curba din jurul lui A. Acestea formează o curbă corespunzătoare care înconjoară imaginea punctului A. Gauss propune, ca măsură a curburii în punctul A de pe suprafață, limita către care tinde raportul dintre aria suprafeței ce înconjoară punctul A și aria suprafeței de pe sferă ce înconjoară imaginea, cînd aceste arii tind spre zero. Efectuînd calculele, el găsește expresia :

$$\text{curbura } k \text{ în } A = \frac{1}{R_1 R_2},$$

unde R_1 și R_2 sînt razele de curbură principale în punctul A.

83. Întrucît valorile lui R_1 și R_2 pot fi pozitive, negative sau infinite (în cazul unei drepte), semnul și valoarea curburii totale k stabilește care este structura suprafeței în vecinătatea unui punct. Anume, dacă R_1 și R_2 au același sens, atunci $k > 0$, iar suprafața are în acel punct *formă ovoidală* (*punct eliptic*); dacă R_1 și R_2 au semne diferite, $k < 0$, suprafața are în acel punct *forma de șa* (*punct hiperbolic*), iar dacă una dintre raze este infinită, atunci $k = 0$ și *punctul este parabolic, forma suprafeței fiind cilindrică*.

84. Problema spațiului o atacase în mod direct și Gauss, încă din 1830, dar Riemann nu avea de unde să știe aceasta, pentru că Gauss nu a făcut-o public, ci într-o scrisoare adresată lui Bessel, care nu a fost cunoscută decît după moartea lui. Iată ce scria el atunci : „După părerea mea cea mai intimă, știința spațiului ocupă *apriori*, în sistemul cunoștințelor noastre, o altă poziție decît teoria mărimilor pure... dacă numărul nu este decît produsul spiritului nostru, spațiul are o realitate în afară de spiritul nostru, realitate căreia noi nu-i putem prescrie legile sale complet *apriori*."

85. Prin „cea mai scurtă linie", Riemann înțelegea *o dreaptă* în plan și respectiv, *o linie geodezică* pe o suprafață curbă. În cazul sferei, liniile geodezice sînt cercurile mari, acelea ce au, ca rază, raza sferei.

86. Din acest exemplu se poate trage o concluzie și asupra celui de-al doilea postulat al lui Euclid : „Orice dreaptă finită se poate prelungi incontinuu în linie dreaptă." În acest postulat nu se specifică *infinitatea liniei drepte*, ci numai *nemărginirea ei* și el nu este contrazis pe sferă, căci linia dreaptă (adică arcul de cerc mare) poate fi prelungit incontinuu, deoarece cercul nu are margine și linia se înfășoară pe ea însăși la nesfîrșit.

87. Cercetările întreprinse de F. Schmidt au fost continuate mai tîrziu de P. Stäckel, care a descifrat o parte dintre manuscrisele lui Bolyai. Împreună cu matematicianul F. Engels au publicat între 1913—1918 două volume: *Despre viața și lucrările celor doi Bolyai* (vol. I) și *Extrase din scrierile lor* (vol. II). La 100 de ani de la nașterea lui János Bolyai, în 1902, s-a sărbătorit la Cluj această aniversare, cînd și P. Stäckel și F. Engels au început cercetările asupra lui Bolyai. În 1952, cînd s-au împlinit 150 de ani de la nașterea lui János Bolyai, Academia Română a tradus în românește *Appendix*-ul, iar lucrarea a apărut în Editura Academiei, în 1954. Tot atunci au fost prezentate mai multe comunicări, dintre care amintim: Acad. Gh. Vrănceanu: *Viața și opera lui János Bolyai*; S. Stoilov: *Caracterul revoluționar al ideilor lui Bolyai și Lobacevski*.

88. O suprafață de rotație, raportată la meridiane și paralele, este definită prin următoarele ecuații parametrice:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u),$$

unde $u = \text{const.}$ reprezintă liniile paralele ale suprafeței, iar $v = \text{const.}$ meridianele. Elementul liniar are forma:

$$ds^2 = \left[1 + f'^2(u)\right] du^2 + u^2 dv^2.$$

Punînd condiția ca funcția arbitrară $f(u)$ să fie determinată în așa fel ca suprafața de rotație obținută să aibă, în toate punctele ei, curbura constantă și negativă $k = \frac{-1}{R^2}$ ($R = \text{const.}$), rezultă astfel o infinitate de suprafețe cu curbura constantă negativă, iar cea mai simplă dintre ele se numește *pseudosferă*.

89. În studiul lui V. Kagan: *Lobacevski*, tradus în limba franceză la Editura Mir, Moscova, 1974, autorul arată (p. 339) că Lobacevski a consultat revista în care se află articolul lui Mindig: „Contribuții la teoria liniilor celor mai scurte de pe suprafețele curbe" (publicat în *Jurnalul* lui Crelle din 1840), însă numai în sala de lectură a Bibliotecii.

90. Eugenio Beltrami era preocupat de probleme de geometrie, algebră superioară și analiză. El a scos din uitare lucrările lui P. Saccheri, remarcate în cursul veacului al XVIII-lea, dar acum cu totul pierdute din vedere. În 1889, el a publicat articolul „Un precursor italian al lui Legendre și Lobacevski", care s-a bucurat de o largă popularitate; ca dovadă, în 1894, lucrarea lui Saccheri a fost tradusă în limba engleză, apoi

în 1895 în limba germană și în 1904 în limba italiană. Publicarea corespondenței lui Gauss a atras atenția și asupra altei lucrări, ce trecuse aproape neobservată, anume aceea a lui A. M. Legendre: *Reflecții asupra diverselor moduri de a demonstra teoria paralelelor*, Paris, 1833, lucrare admirată de Lobacevski.

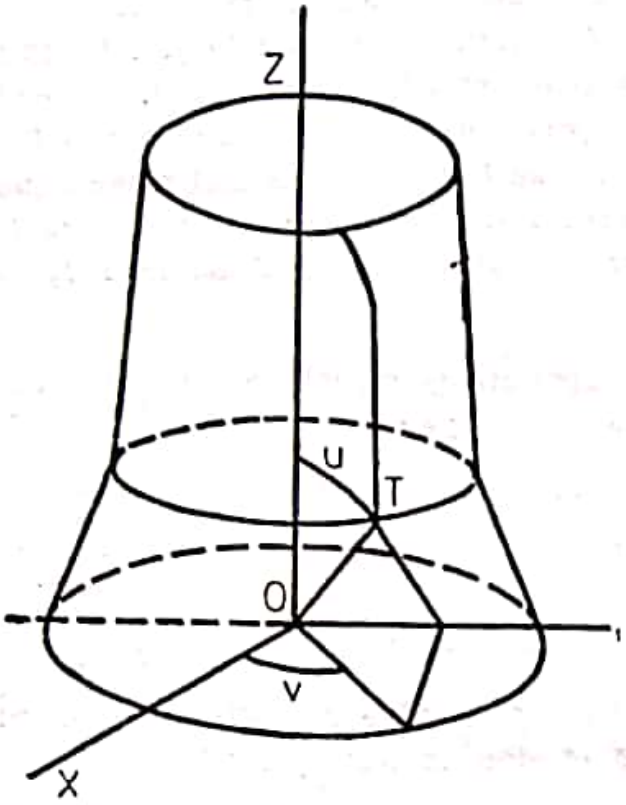


Fig. 33

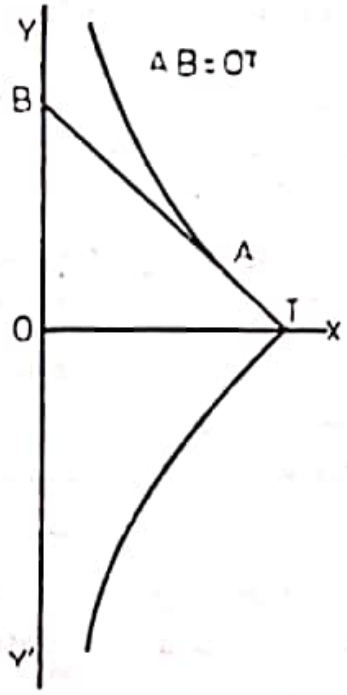


Fig. 34

91. Tractricea a fost studiată de Leibniz: el a definit-o ca locul punctelor materiale determinate de extremitatea unei bare rigide care este așezată pe axa Ox, (fig. 33), cu o extremitate în O și alta în T, dacă această bară este trasă de capătul ce se află în O de-a lungul axei Oy. Extremitatea T descrie o jumătate de tractrice, cînd este trasă înspre y, iar cealaltă jumătate, cînd (pornind tot din origine) este trasă în sens invers. Ecuațiile ei parametrice sînt:

$$x = a \sin t, \quad y = a (\ln \operatorname{tg} t/2 + \cos t).$$

Ea are proprietatea că lungimea segmentelor de pe tangentele la curbă (fig. 34), cuprinse între punctul de contact și asimptota $y'y$, este constantă și egală cu OT. Pentru $t = 0 : x = 0$ și $y \to \infty$, adică axa $y'y$ este asimptota curbei, iar pentru $t = \pi/2 : x = a$ și $y = 0$, adică punctul T este punct

de întoarcere. Prin rotirea curbei în jurul asimptotei sale se obține *pseudosfera*, care se aseamănă cu două trompete infinit de lungi, lipite între ele prin marginile lor răsfrînte (fig. 35).

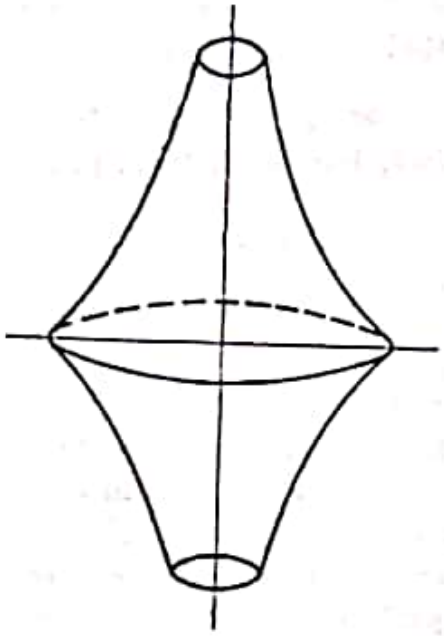


Fig. 35

92. Problema necontradicției geometriei neeuclidiene l-a preocupat atît pe Bolyai, cît și pe Lobacevski. În critica pe care Bolyai a făcut-o lucrării *Cercetărilor geometrice* scrisă de Lobacevski (lucrare scrisă în limba maghiară, dar cu un alfabet latinizat imaginat de el și rămasă în manuscris, descifrată și publicată în 1902 de P. Stäckel și prof. Kürschk), el se ocupă și de această problemă. Bolyai afirmă aici că a găsit o demonstrație perfectă a necontradicției geometriei neeuclidiene. Demonstrația însă nu este dată în această lucrare și nici nu a fost găsită în foile de manuscris ce au fost transcrise pînă acum.

93. Despre H. Helmholtz (1821—1894), matematicianul englez W. K. Clifford a scris: „Helmholtz, fiziologul care a învățat fizica de dragul fiziologiei și matematica de dragul fizicii, este acum printre primii în toate aceste trei domenii."

94. W. K. Clifford (1845—1879) a murit de tuberculoză la 34 de ani. În activitatea sa, de numai 15 ani, s-a remarcat ca geometru și filozof. L-au preocupat în special geometriile neeuclidiene și prin contribuția adusă se situează alături de Riemann și Helmholtz. El a susținut punctul de vedere că geometria este o știință experimentală, o parte a fizicii. În lucrarea *Asupra teoriei spațiale a materiei*, pe care a scris-o cu trei ani înainte de sfîrșitul vieții, se dovedește un precursor al teoriei gravitației a

lui Einstein. A fost din 1871 profesor la Londra. În 1872 a introdus noțiunea de *bicuaternioni*, numere hipercomplexe care generalizează cuaternionii descoperiți de Hamilton. Bicuaternionii au aplicații în geometriile neeuclidiene. Clifford a creat o geometrie a mișcării compatibilă cu spațiile neeuclidiene.

95. René Taton: *Istoria generală a științei*, vol. III, Editura științifică, București, 1972, p. 9.

96. Matematicianul francez J. V. Poncelet (1788—1867) a fost elev al Școlii politehnice din Paris și un mare îndrăgostit de geometrie, mai ales de *geometria descriptivă* și *geometria de poziție*, atunci mult discutată. Aceste ramuri ale geometriei în care studiul proprietăților figurilor geometrice avea la bază teoria proiecțiilor cilindrice se găseau tratate mai întîi de Gaspard Monge în *Cursul de geometrie descriptivă* și apoi de Lazare Carnot (1753-1823) în *Geometria de poziție*, apărută în 1803, și *Teoria transversalelor*, din 1806. În închisoarea unde fusese adus ca prizonier se mai aflau și alți tineri care sperau să dea examenul de intrare la Școala politehnică de îndată ce se vor întoarce în țară. Ca să-i ajute să pregătească acest examen, Poncelet a căutat să-și amintească toate teoremele pe care le învățase din aceste cărți și, adunînd bucățele de cărbune ce rămîneau nearse în soba ce-l păzea de îngheț, a început să umple pereții celulei cu desenele care ilustrau teoremele ce le formula. Astfel, în septembrie 1814, cînd s-au întors în Franța, în mintea lui Poncelet se cristalizaseră primele rezultate ale geometriei pe care a numit-o *proiectivă*, ca să pună astfel în evidență obiectul acestei ramuri a geometriei. Cuvîntul *proiecție* derivă din latinește; *proiectio* înseamnă *a arunca înainte*. Proiecția centrală a fost cunoscută de egipteni, babilonieni și greci și a fost folosită la întocmirea planurilor diferitelor clădiri sau monumente. Euclid a scris și o carte despre acest subiect, pe care a intitulat-o *Optica*, pentru a scoate astfel în evidență faptul că imaginea obiectelor din spațiu se formează pe retina ochiului printr-o *proiecție centrală*.

97. Cuvîntul *perspectivă* este de origine latină: *per* înseamnă prin și *spectionis*, privire. A fost introdus de către artiștii din evul mediu și a fost folosit apoi în continuare în timpul Renașterii, cînd pictorii se serveau de proiecția centrală ca să evoce cît mai exact, în planul tabloului, spațiul cu trei dimensiuni. Începînd chiar din secolul al XII-lea, interesul pentru problemele legate de perspectivă era așa de mare încît acestea au devenit obiect de studiu în universitățile ce se înființau atunci. Din secolul al XV-lea aceste cercetări au căpătat un caracter teoretic, datorită

arhitectului florentin Filippo Brunelleschi (1377—1446) și lui Leon Battista Alberti (1404—1472). Pe lîngă lucrările acestora, multe alte teoreme legate de proiecția centrală se găsesc menționate și în *Tratatul de pictură* al lui Leonardo da Vinci (1452—1519), tipărit întîia oară în 1651 și în *Cercetări despre măsurările cu rigla și compasul* a lui Albrecht Dürer (1471—1528).

98. Cu excepția lui Blaise Pascal, atunci în vîrstă de 16 ani, care a fost entuziasmat de lucrările lui Desargues și intenționa să se folosească de ele ca să elaboreze o teorie a conicelor, acestea au trecut neobservate. Și foarte probabil că ele s-ar fi pierdut, fără de urmă, dacă un elev de-al lui Desargues, A. Bosse (1611—1678), de meserie gravor în cupru, nu ar fi încercat să popularizeze ideile profesorului său. Într-o carte pe care a publicat-o în 1647 la Paris, *Meteda universală a d-lui Desargues de a practica perspectiva*, pe lîngă textul său, la urmă a adăugat și lucrarea lui Desargues din 1636 ; același lucru l-a făcut și cu celelalte scrieri, în anul următor. În *Însemnări cu privire la evenimentele ce se produc la întîlnirea unui con cu un plan*, Desargues stabilește teoria conicelor din punct de vedere proiectiv. Prin *con*, autorul înțelege totalitatea dreptelor care pornesc din centrul de proiecție și întîlnesc figura ce trebuie proiectată pe un plan. Pînă în 1845, textul original al acestei lucrări se considera pierdut. În acest an s-a descoperit, mai întîi, o copie a ei în manuscris, apoi, chiar unul dintre exemplarele tipărite. *Însemnările* lui Desargues au fost retipărite la Paris în 1951. În prima carte a lui Desargues, *Perspectiva*, se află următoarea teoremă care îi poartă numele :

Teorema lui Desargues : „Dacă dreptele care unesc două cîte două dintre vîrfurile triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ sînt concurente, (fig. 36) atunci laturile corespunzătoare se taie în trei puncte coliniare." *Reciproc :* „Dacă laturile a două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ se taie două cîte două în trei

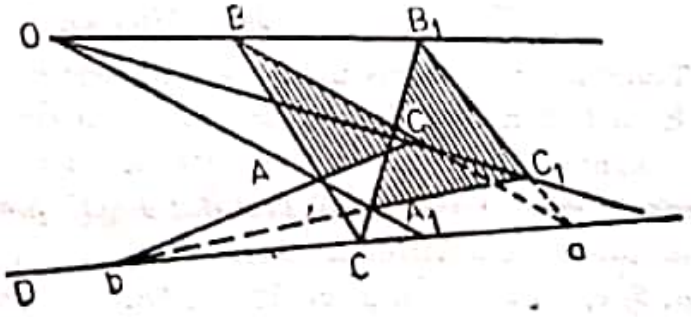


Fig. 36

puncte coliniare, atunci dreptele care unesc vîrfurile corespunzătoare sînt concurente." Această teoremă este fundamentală pentru *geometria proiectivă*, fiindcă în ea apar puncte coliniare și drepte concurente, elemente

ce se păstrează prin proiecția centrală. Dealtfel, Poncelet a pus această teoremă la baza teoriei *figurilor omologe*. Cuvîntul *omolog* este de origine greacă: *homologos* înseamnă *în armonie*. Poncelet vorbește pentru prima oară despre *omologie* ca despre o *transformare proiectivă* determinată de un punct O, numit *centru de omologie* sau *perspectivă*, și de o dreaptă D, *axă de omologie*. El a numit vîrfurile triunghiurilor situate pe aceeași dreaptă (AA_1, BB_1, CC_1) *vîrfuri omologe*, laturile care se întîlnesc pe dreapta D (AB, A_1, B_1 etc,), *laturi omologe*, iar triunghiurile ABC și $A'B'C'$, *triunghiuri omologe*.

99. În ultima lucrare a lui L. Carnot *Teoria transversalelor*, el a generalizat cunoscuta teoremă despre transversală stabilită de Menelaos din Alexandria, matematician grec de la sfîrșitul secolului I e.n. Cele trei

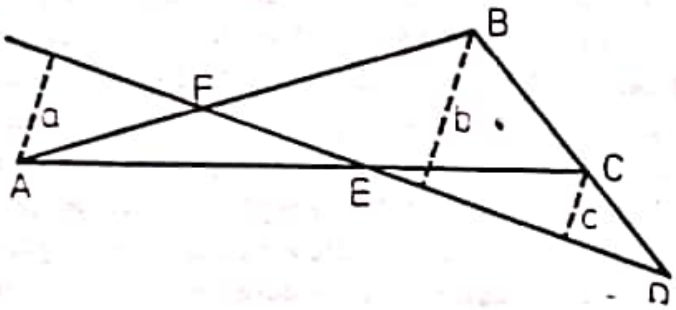


Fig. 37

cărți ale lui Menelaos, intitulate *Sferica*, s-au păstrat numai pentru că au fost traduse în limba arabă. Titlul lucrării arată că Menelaos s-a ocupat de proprietățile figurilor, în particular ale triunghiurilor de pe sferă. Teorema amintită se află în cartea a treia:

„Dacă o transversală FD taie laturile unui triunghi ABC (fig. 37), produsul a trei segmente care nu au o extremitate comună este egal cu produsul celorlalte trei segmente, adică:

$$\frac{AF \cdot BD \cdot CE}{BF \cdot CD \cdot AE} = 1.$$

Teorema este cunoscută și sub numele de *teorema celor șase segmente*. Ea a fost mult îndrăgită de matematicienii din toate epocile și de aceea se cunosc foarte multe demonstrații diferite ale ei. Iată demonstrația pe care a dat-o Poncelet în *Tratatul despre proprietățile proiective din* 1822: Se proiectează vîrfurile ABC ale triunghiului pe transversala FD și fie a, b, c, lungimile proiectantelor. Din triunghiurile asemenea ce s-au format, rezultă:

$$\frac{AF}{BF} = \frac{a}{b}; \quad \frac{BD}{CD} = \frac{b}{c}; \quad \frac{CE}{AE} = \frac{c}{a}$$ și, prin înmulțire,

apare relația lui Menelaos. În realitate, descoperitorul acestei teoreme a fost Euclid. El a publicat-o într-o lucrare, azi pierdută, numită *Porisme*, termen al cărui înțeles nu este bine lămurit. S-ar părea că era vorba de o anumită culegere de probleme și teoreme, de natură diferită, dar care s-ar fi completat unele pe altele. Menelaos a luat teorema din cartea lui Euclid și apoi a generalizat-o pentru triunghiurile sferice.

100. Poncelet a introdus noțiunea de *plan proiectiv*, care este o generalizare a noțiunii de *plan euclidian*, în felul următor: Fie O un punct din spațiu. Mulțimea tuturor dreptelor și planelor din spațiu care trec prin O se numește *stea* proiectantă de drepte și plane cu centrul în O. Dacă se intersectează această stea, cu centrul în O, cu un plan ce nu trece prin O, atunci, excepțind planul și dreptele din O care sînt paralele cu planul P, se poate stabili o corespondență biunivocă între toate punctele și dreptele planului P și toate dreptele și planele din steaua O; căci fiecărui punct din P îi corespunde dreapta din steaua O care trece prin acel punct și *invers*, fiecărei drepte din P îi corespunde planul din O ce taie P după această dreaptă. Dacă se admite că și dreptele din O, paralele cu P, taie planul P într-un *punct impropriu*, adică situat la infinit, și că planul stelei paralel cu planul P taie planul P după o *dreaptă improprie*, situată la infinit, atunci planul P completat cu punctele și dreapta improprie se numește *plan proiectiv* și are proprietatea că se poate stabili o corespondență biunivocă între *toate* punctele și dreptele lui și dreptele și planele stelei O. O transformare a unui plan proiectiv în alt plan proiectiv se numește *transformare proiectivă* și totalitatea teoremelor despre figurile din planul proiectiv constituie *geometria proiectivă plană*.

101. Considerînd 4 puncte A, B, C, D situate pe o dreaptă (coliniare) se numește *biraportul* lor sau încă și *raport anarmonic*, și se notează $(ABCD)$, (fig. 38), raportul dintre cele două rapoarte simple ale segmentelor cu originele în A și B și extremitățile în C și D:

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

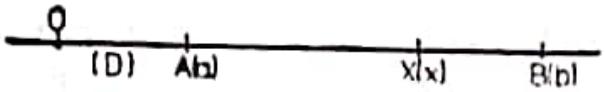
Noțiunea de biraport a fost cunoscută din antichitate. Geometrii greci au observat că această mărime *se păstrează prin proiecție*, deși raportul simplu a trei puncte nu se păstrează. Demonstrațiile teoremei se află în cărțile lui Pappus din Alexandria (sec. III e.n.), care a luat-o, foarte probabil, dintr-o lucrare pierdută a lui Euclid. Această noțiune a reapărut apoi, începînd cu secolul al XVII-lea, în lucrările lui Desargues, Pascal, Carnot și Poncelet. În exprimarea proprietăților proiective ale

figurilor, raportul anarmonic joacă același rol, în geometria proiectivă, ca și lungimea unui segment în geometria euclidiană (metrică). Dar deși Poncelet a recunoscut în biraport o *mărime fundamentală*, datorită pro-

Fig. 38

prietății lui de invariantă la o transformare proiectivă, cel ce i-a dat numele de *biraport* și a accentuat că el este o noțiune geometrică de sine stătătoare, a fost A. F. Möbius, în lucrarea publicată în 1827 sub numele de *Calculul baricentric, un mijloc nou de tratare analitică a geometriei*. Möbius a introdus *coordonatele baricentrice* astfel: Fie o dreaptă (D) și pe ea două puncte fixe A și B și un punct variabil X (fig. 39). Considerînd raportul $(ABX)=\frac{AX}{BX}$, valoarea lui $r=-(ABX)=-\frac{AX}{BX}$ se numește *coordonata baricentrică* a punctului X, în raport cu punctele A și B. Pentru că, dacă A și B sînt puncte materiale, de greutăți respectiv m și n, atunci punctul

Fig. 39



X este centrul de greutate al sistemului format din cele două puncte. În adevăr, să notăm cu a, b și x abscisele punctelor A, B, X față de o origine O. Avem:

$$r=-\frac{AX}{BX}=\frac{x-a}{b-x},$$

de unde:

$$x=\frac{a+rb}{1+r}.$$

Dacă $r=\frac{n}{m}$, atunci $x=\frac{ma+nb}{m+n}$.

Considerînd acum raportul $(ABCD)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$, el se mai poate scrie și ca raportul dintre coordonatele baricentrice ale punctelor C și D în cazul în care considerăm punctele A și B ca fundamentale, adică avem:

$$(ABCD)=\frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

Aşadar, raportul anarmonic dintre patru puncte de pe o dreaptă (cuaternă) este echivalent cu raportul coordonatelor baricentrice ale ultimei perechi faţă de punctele primei perechi, privite ca fixe.

Metoda coordonatelor, folosită în geometria euclidiană analitică, nu s-ar mai putea aplica în cazul geometriei proiective, căci nu s-ar putea exprima, în acelaşi mod, şi coordonatele punctelor de la infinit. Ca să o poată face accesibilă şi în acest caz, matematicienii, începînd cu Plücker, au folosit *coordonatele omogene*, care fuseseră introduse nu de multă vreme. Coordonatele carteziene (x, y) ale unui punct $T(x, y)$ definesc coordonatele omogene X, Y, Z ale aceluiaşi punct $T(X, Y, Z)$ prin relaţiile:

$$x = \frac{X}{Z}, \qquad y = \frac{Y}{Z}, \tag{1}$$

astfel ca valorilor x, y să le corespundă valorile X, Y, Z, determinate pînă la un factor constant ρ, arbitrar, dar diferit de zero (valorile $\rho X, \rho Y, \rho Z$ verifică relaţiile (1). Observăm de aici că între punctele spaţiului proiectiv şi coordonatele omogene nu mai există corespondenţa biunivocă, ce caracterizează coordonatele carteziene ale spaţiului euclidian. Aceasta pentru că, dacă unui punct T îi corespunde o ternă X, Y, Z, inversa nu este adevărată: există o infinitate de terne $\rho X, \rho Y, \rho Z$ care definesc acelaşi punct T. Dacă (x, y) sînt numere finite, se poate lua $Z = \rho$ şi deci:

$$X = \rho x, \quad Y = \rho y, \quad Z = \rho$$

sînt coordonatele omogene, finite (căci $Z \neq 0$)

Dacă însă $x \to \infty$ şi $\frac{y}{x} = A$, atunci $Z = 0$, $X = \rho$, iar $Y = \rho A$; aşadar punctul T, care are o coordonată carteziană infinită şi nu ar putea fi folosit în calcule ($x \to \infty$), are coordonatele omogene *finite* şi nu toate zero.

Numirea de *raport anarmonic* a fost introdusă de M. Chasles.

102. Jacob Steiner (1796—1863) era un păstor elveţian, care pînă la vîrsta de 14 ani nu ştia nici să scrie, nici să citească. El a fost primit de vestitul pedagog Pestalozzi la şcoala lui din Yverdon. Datorită calităţilor lui neobişnuite, a putut ajunge la 22 de ani să urmeze cursurile de matematici ale Universităţii din Heidelberg. După ce a devenit profesor de matematici, a fost chemat, din anul 1834, ca profesor de matematici la Universitatea din Berlin.

103. Prin *dualitate* se înțelege o *transformare* astfel ca unui punct să-i corespundă o anumită dreaptă și invers, acelei drepte să-i corespundă același punct. În consecință, unei mulțimi de puncte coliniare îi corespunde un fascicul de drepte concurente și invers, unui fascicul de drepte concurente îi corespunde mulțimea respectivă a punctelor coliniare. Două figuri sau teoreme sînt *duale*, dacă una se obține din cealaltă prin înlocuirea elementelor și operațiilor uneia prin elementele și operațiile duale lor. Într-o transformare proiectivă, dualitatea se păstrează și, din această cauză, toate teoremele din geometria proiectivă se prezintă în perechi duale. Aceasta este o caracteristică a geometriei proiective, pe care nu o are geometria euclidiană (metrică), unde nu se poate aplica principiul dualității (ar fi lipsit de sens să ne gîndim la elementul dual al unui segment de dreaptă sau al unui unghi!).

104. Arthur Cayley (1821—1895) a fost, alături de Euler și Cauchy, unul dintre matematicienii cu cele mai multe publicații (aproape 1 000 de articole cuprinse în vreo 8 000 de pagini). În multe domenii, el a introdus idei noi, care s-au dovedit a avea largi aplicații atît teoretice cît și practice. La 17 ani el studia matematicile la „Trinity College" din Cambridge și s-a remarcat de la început prin talentul său astfel că, în 1842, a fost numit agregat și repetitor pe timp de trei ani. În acest timp, el a publicat numeroase lucrări, fie despre geometria cu n dimensiuni, fie despre teoria invarianților, despre geometria curbelor plane etc. Matematicile nu erau singura lui pasiune; a doua era pictura și a treia, lectura. Citea romane, teatru și poezie, avînd o predilecție pentru Walter Scott, Shakespeare, Byron; citea clasicii greci în original și tot în original literatura modernă franceză, italiană și germană. În 1846 el a părăsit Colegiul din Cambridge și a plecat la Londra, pregătindu-se să se facă avocat. În 1849 a intrat în barou, dar a continuat să publice lucrări de matematică. Aici a cunoscut, în 1850, pe J. J. Sylvester (1814—1897), alt matematician remarcabil care a procedat, ca și Cayley, în sensul că a părăsit cariera matematică pentru a se face avocat. Cayley și Sylvester au colaborat la înfăptuirea unuia dintre cele mai interesante capitole ale algebrei: *teoria invarianților*. După 14 ani de avocatură, în 1863, A. Cayley se reîntoarce la Cambridge, unde i se oferă o catedră de matematici, pe care o păstrează pînă la moarte.

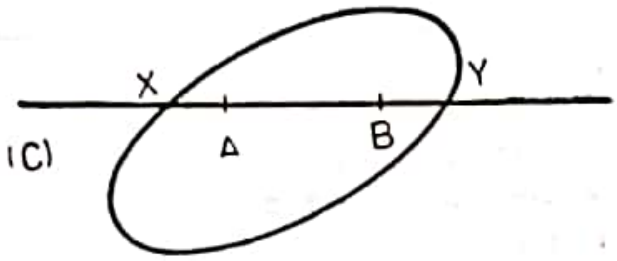
105. A. Cayley a dat prima definiție proiectivă a distanței dintre două puncte, considerînd o conică (nedegenerată) reală sau imaginară, pe care a numit-o *absolutul planului*, fiindcă în raport cu ea avea să definească distanța dintre două puncte din plan. Fie (C) conica, adică absolutul planului, și

A, B două puncte din plan, iar X, Y intersecțiile dreptei AB cu conica (fig. 40). Distanța dintre punctele A și B se definește prin invariantul proiectiv:

$$AB = \frac{1}{\sqrt{|K|}} \log \left| \frac{AX}{BX} : \frac{AY}{BY} \right| = \frac{1}{\sqrt{|k|}} \left| \log (ACXY) \right|^{1}.$$

Deși Cayley a stabilit această formulă în timp ce geometria lui Lobacevski apăruse și în limba germană și în limba franceză, el nu a întrevăzut că această descoperire a lui ar putea fi interpretată ca un model al unei geometrii neeuclidiene.

Fig. 40



106. Deși probleme din care să apară noțiunea de grup au fost puse și mai înainte, de Euler, Cauchy, Gauss și alții, totuși E. Galois se consideră că este creatorul teoriei grupurilor, fiindcă el a arătat că întreaga teorie a ecuațiilor algebrice poate fi stabilită cu ajutorul teoriei grupurilor. El a arătat că rezolvarea prin radicali a ecuației de gradul al V-lea era condiționată de totalitatea permutărilor executate într-o expresie algebrică, care a fost alcătuită, după anumite reguli, din coeficienții ecuației considerate. Mulțimea acestor permutări a fost numită de Galois *grup de permutări* și el a stabilit care era structura lui. Galois a arătat că, în general, rezolvarea unei ecuații algebrice este legată de studiul unui grup de substituții și prin aceasta el a introdus *noțiunea de structură* ca pe un nou instrument al gîndirii. Cuvîntul *structură* provine de la *struere* = a construi. De pildă, dacă într-o mulțime de elemente au fost definite anumite relații între aceste elemente, se spune că avem de-a face cu o *structură*. Un anumit număr de legi de compoziție pe o mulțime stabilește o *structură algebrică* (cum este și structura de grup). Există însă și altfel de structuri, de altă natură, ca structuri de ordine, structuri topologice etc. La început, teoria grupurilor s-a dezvoltat în domeniul algebrei, ca teoria grupurilor de transformări, din cauză că rezultatele obținute puteau fi puse în corespondență cu proprietățile de echivalență sau de simetrie ale rădăcinilor unei ecuații. Dar,

[1] k este o constantă și valorile ei și ale raportului anarmonic se consideră aritmetic.

În cursul secolului al XIX-lea și al XX-lea, teoria grupurilor a putut fi generalizată și la alte ramuri ale științei ca geometria, cristalografia, fizica, chimia, ea fiind cerută tot de anumite proprietăți de echivalență și simetrie specifice acestor domenii. Astfel, teoria grupurilor a luat o largă dezvoltare și s-a despărțit în mai multe ramuri, ca: teoria grupurilor finite, teoria grupurilor infinite, teoria grupurilor continue, a celor discontinue sau mixte, teoria generală a grupurilor etc. Un rol important în teoria grupurilor îl au termenii *transformare* și *invariant*. Prin transformare (lat. *transformare* = a trece de la o formă la alta) se înțelege orice funcție (bijectivă). Proprietatea de *invarianță*, fie a unei expresii algebrice, fie a unei figuri geometrice, apare ca ceea ce rămîne neschimbat la o anumită transformare, aceste proprietăți exprimîndu-se prin *invarianții unui grup* de transformări.

107. În geometria euclidiană, ca și în cele neeuclidiene, noțiunea de *mișcare* apare în cele mai multe dintre raționamente și demonstrații. Însă, în realitate, ea nu se aplică practic niciînd. Căci, deși spunem că „suprapunem două segmente sau două triunghiuri", nu o putem face efectiv, deoarece figurile geometrice sînt doar niște mărimi abstracte! De fapt, folosim această noțiune de mișcare sau de deplasare ca să stabilim astfel *o corespondență* între punctele figurii considerate și ale aceleia deplasate. În geometrie, deplasarea are rolul de a stabili o anumită aplicație a spațiului pe el însuși. Fie, de pildă, un segment AB. Să presupunem că, printr-o anumită deplasare, segmentul AB coincide cu un alt segment CD în așa fel că fiecare punct de pe AB se așază peste cîte un punct de pe CD. Există, desigur, și o deplasare *inversă*, astfel că segmentul CD se suprapune peste AB în așa fel că orice punct de pe CD coincide cu un anumit punct de pe AB. În plus, să mai presupunem că, după ce AB s-a suprapus peste CD, o altă deplasare face ca CD să se suprapună, în aceleași condiții, peste un alt segment EF. În acest caz, se poate stabili și o deplasare *care să ducă direct pe AB peste EF*. Așadar, putem spune că mulțimea deplasărilor din spațiu formează *un grup*, deoarece: 1) orice deplasare admite și deplasarea inversă; 2) dacă două deplasări aparțin mulțimii deplasărilor din spațiu, atunci există și deplasarea rezultantă, obținută prin efectuarea succesivă a celor două deplasări; 3) există deplasarea inversă. La aceste proprietăți trebuie să mai adăugăm, în cazul spațiului euclidian, că distanța dintre A și B, măsurată cu o anumită unitate de măsură, se exprimă printr-un *număr aritmetic* care se păstrează în toate deplasările efectuate. Acest număr este deci *invariantul grupului de deplasări*. Proprietatea a fost observată pentru prima oară de Felix Klein.

108. În adevăr, avem :

$$AC + CB = \frac{k}{2} \ln (ACXY)(CBXY) = \frac{k}{2} \ln \left(\frac{AX}{CX} : \frac{CY}{AY}\right)\left(\frac{CX}{CY} : \frac{BY}{BX}\right) =$$

$$= \frac{k}{2}\left(\frac{AX}{AY} : \frac{BY}{BX}\right) \text{ sau } AC + CB = \frac{k}{2} \ln (ABXY) = AB.$$

109. Deşi interpretarea geometriei neeuclidiene stabilită de Beltrami cu ajutorul pseudosferei are o deosebită importanţă prin faptul că ea a dovedit în mod cert existenţa geometriei lui Bolyai-Lobacevski, s-a constatat că această reprezentare a planului Bolyai-Lobacevski pe suprafaţa pseudosferei are loc numai pentru o mică porţiune a lui. Aceasta pentru că pseudosfera nu este ca sfera, o suprafaţă netedă peste tot, ci are acea „creastă" formată din puncte de întoarcere, numite în geometrie „puncte singulare". Din această cauză, se spune că pseudosfera este un *model local* al geometriei lui Bolyai-Lobacevski, spre deosebire de modelul lui Klein care se aplică întregului plan al lui Bolyai-Lobacevski ; de aceea a putut fi generalizat şi pentru cazul spaţiului neeuclidian Bolyai-Lobacevski.

Există şi alte modele ale geometriei Bolyai-Lobacevski, propuse după ce a fost cunoscută lucrarea lui Klein. Astfel este modelul imaginat de H. Poincaré, care consideră tot interiorul unui cerc drept planul lui Bolyai-Lobacevski, însă ca drepte nu se mai iau coardele cercului, ci semicercuri care taie ortogonal cercul de frontieră al planului neeuclidian.

110. În continuare, Felix Klein spune : „Mulţimea deplasărilor (fiecare deplasare fiind considerată ca o operaţie efectuată asupra totalităţii spaţiului) oferă exemplul unui grup de transformări. Un grup conţinut în el[1] este format, de exemplu, de rotaţiile în jurul unui punct ... Există transformări ale spaţiului care nu schimbă întru nimic proprietăţile geometrice ale figurilor. Prin natura lor, aceste proprietăţi sînt independente de poziţia ocupată în spaţiu de figura considerată, de mărimea sa absolută şi, de asemenea, de sensul în care sînt dispuse părţile ei. Deplasările spaţiului, transformările lui prin asemănări şi acelea prin simetrie nu schimbă proprietăţile figurilor ... Noi vom numi *grup principal* de transformări ale spaţiului, mulţimea acestor transformări. Proprietăţile geometrice nu sînt alterate prin transformările grupului principal. Reciproca este, de asemenea, adevărată : proprietăţile geometrice sînt caracterizate prin invarianţa relativă la transformările grupului principal" (vezi şi nota 107).

---

[1] Un asemenea grup se numeşte *subgrup*.

111. Transformările proiective nu păstrează lungimile definite în sens euclidian, căci ele pot duce un punct din plan la infinit și invers. Formulele de transformare proiectivă a planului, numite și omografii, sînt :

$$x_1 = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}, \text{ unde } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Prin (x, y) s-au notat coordonatele unui punct $T(x, y)$ din plan și prin (x_1, y_1) coordonatele punctului T_1, obținute prin transformarea proiectivă. Dacă $a_3x + b_3y + c_3 = 0$, atunci punctul T_1 este un *punct impropriu*, adică nu se află la distanță finită, ci la infinit. Ecuația $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ reprezintă ecuația unei drepte care, prin această transformare, devine *dreapta improprie*, adică dreapta de la infinit.

Dacă în locul coordonatelor carteziene (x, y) se consideră coordonatele omogene (X, Y, Z), definite prin : $x = \frac{X}{Z}$ $y = \frac{Y}{Z}$, atunci avem :

$$\frac{X_1}{Z_1} = \frac{a_1X + b_1Y + c_1Z}{a_3X + b_3Y + c_3Z}, \qquad \frac{Y_1}{Z_1} = \frac{a_2X + b_2Y + c_2Z}{a_3X + b_3Y + c_3Z}.$$

Dar acestea sînt echivalente cu următoarele 3 relații :

$$\rho X_1 = a_1X + b_1Y + c_1Z,$$
$$\rho Y_1 = a_2X + b_2Y + c_2Z,$$
$$\rho Z_1 = a_3X + b_3Y + c_3Z,$$

deoarece coordonatele omogene sînt determinate, abstracție făcînd de un factor arbitrar ρ :

$$\frac{X_1}{Z_1} = \frac{\rho X_1}{\rho Z_1}.$$

În cursul secolului al XIX-lea au mai fost definite, în afară de geometria proiectivă, și altele, ca de exemplu :

Geometria conformă, caracterizată prin transformarea conformă, în care există noțiunea de unghi, dar nu și de distanță ;

Geometria afină, în care se păstrează raportul segmentelor de pe aceeași dreaptă, a arilor, dreptele paralele, dar nu există noțiunea de distanță.

112. În notele III și IV adăugate la sfîrșitul acestui *Program*, Klein vorbește despre „importanța intuiției spațiale" și „despre multiplicitățile cu un număr oarecare de dimensiuni". Considerînd importanța intuiției

spațiale „ca subsistînd prin ea însăși", el arată că : „figurile spațiului trebuie privite în adevărul formelor lor și (ceea ce constituie partea matematică) să se observe relațiile lor drept consecințe evidente ale postulatelor intuiției spațiale ... un model care ar fi executat și examinat, sau numai figurat cu dibăcie, nu ar fi doar un mijloc pentru a atinge scopul, ci chiar lucrul în sine"... În legătură cu multiplicitățile n-dimensionale, Klein face următoarele observații : „Spațiul considerat ca loc al punctelor nu are decît trei dimensiuni, fapt ce nu are nevoie de a mai fi discutat din punct de vedere matematic. Nu se poate afirma, din același punct de vedere, că el ar avea patru sau un număr oarecare de dimensiuni, dar că noi nu putem percepe decît trei. Teoria multiplicităților cu mai multe dimensiuni, așa cum apare ea tot mai mult din cercetările matematice moderne, este, prin natura ei, independentă de o asemenea afirmație. Există însă un mod de a vorbi care decurge desigur din această idee. În locul elementelor unei mulțimi continue, se vorbește despre punctele unui spațiu etc. Acest mod de exprimare are avantajul că, amintind conceptiile geometrice, contribuie la o înțelegere mai ușoară a problemelor asupra multiplicităților cu mai multe dimensiuni, dar, totodată, are și consecințe supărătoare. că pentru mulți aceste cercetări apar ca făcînd parte din aceeași categorie cu problemele despre spațiu."

113. De o deosebită importanță pentru noi este faptul că aceste geometrii cu grup fundamental au preocupat pe geometrii români din trecut și îi preocupă pe cei de acum. Dintre numeroasele lucrări, imposibil de menționat aici, amintim doar de *Tratatul de geometrie diferențială proiectivă a rețelelor*, tipărit la București în 1923 și de *Introducere la geometria diferențială a curbelor*, apărută la Paris în 1931, scrise de Gheorghe Țițeica (1873—1939). Ambele lucrări au fost scrise în limba franceză, pentru a avea posibilitatea mai mare de circulație. Azi ele au devenit clasice. Tot din școala geometrică bucureșteană sînt de menționat rezultate importante stabilite de matematicienii A. Pantazi (1897—1950), acad. Gh. Vrănceanu, care a publicat *Lecții de geometrie diferențială*, în 4 volume, acad. N. Teodorescu etc. În școala matematică de la Iași (înființată și condusă de Alexandru Myller (1879—1965)), Alexandru Myller și elevul său Octav Mayer au publicat împreună, în 1933, un memoriu despre „Geometria centro-afină diferențială a curbelor plane", lucrare ce a avut un răsunet internațional. Aceste cercetări din domeniul geometriei centro-afine, inițiate de Gh. Țițeica, sînt considerate azi drept o creație românească. Post-mortem a apărut, în 1970, voluminosul tratat, *Geometria proiectivă*, al matematicianului O. Mayer (1895—1966). Dintre matematicienii ieșeni care au lucrat în dome-

niul acesta, menționăm pe Mendel Haimovici (1906—1973), Ilie Popa, Ion Creangă, Gh. Gheorghiev etc.

Importantele rezultate stabilite în domeniul geometriilor neeuclidiene și de școlile geometrice românești din Cluj și Timișoara pot fi urmărite în revistele de specialitate din țară și străinătate.

114. La o atare generalizare, Felix Klein face aluzie chiar în „Programul de la Erlangen" ; ceea ce dovedește că problema era discutată și studiată încă din anii 1870—71. Iată, de pildă, în § VII intitulat „Generalizarea celor precedente", găsim : „Transformările respective aparțin unei categorii ce se va studia mai tîrziu în general, *transformările de contact*, adică transformările astfel încît contactul figurilor să fie o proprietate invariantă." În transformările de contact, dreptele din spațiul euclidian se transformă în sfere. Sophus Lie și-a orientat cercetările înspre clasificarea grupurilor continue de transformări de contact, numite acum și grupuri Lie. Rezultatele la care a ajuns sînt cuprinse în cele trei volume de *Teoria grupurilor de transformări* apărute între 1888—1893. În *Transformările de contact* tipărită în 1896 etc., Lie a creat teoria generală a grupurilor continue care are aplicații nu numai în probleme de geometrie, dar și în teoria ecuațiilor diferențiale. Ea a fost dezvoltată de elevii lui și a fost aplicată în domenii foarte diferite, ca — de pildă — în acela al topologiei.

115. Bazele topologiei au fost puse de Cayley (1846) și de J.B. Listing (1808—1882), care , la îndemnul lui Gauss, a scris prima carte de *Topologie*, tipărită în 1847. Însă fondatorul topologei este considerat a fi B. Riemann, deși el nu a numit-o niciodată astfel, ci *Analysis-situs !* Aceasta pentru că Riemann a privit-o dintr-un nou punct de vedere, imaginînd cel dintîi spațiul topologic ; el a definit „Analysis-situs" ca studiul proprietăților ce rămîn invariante la transformările punctuale bicontinue, astfel că părțile care sînt în contact rămîn în contact și punctele distincte tot așa. Dintre matematicienii români care au adus o reală contribuție în domeniul topologiei, nu amintim decît pe Simion Stoilov (1887—1961), creatorul școlii românești de topologie. Monografia sa *Leçții asupra principiilor topologice a teoriei funcțiilor analitice*, tipărită în 1938 la Paris și retipărită tot acolo în 1956, a fost scrisă la îndemnul profesorului său E. Borel (1871—1956) și este privită ca o lucrare fundamentală în studiul topologiei.

116. Noua concepție a lui E. Cartan o lărgește pe aceea a lui F. Klein, ca un caz particular. Dar generalizarea grupurilor de transformări a fost continuată și de alți matematicieni. O concepție mai abstractă a fost stabilită cu ajutorul teoriei mulțimilor, de M. Frechet. El a definit spațiile

abstracte ca o mulțime de puncte (x, y, z, ...) pe care s-a definit un număr nenegav numit *funcție de distanță*, care satisface anumite condiții. Tot Frechet a definit și spațiile topologice, în care nu se mai pune nici o condiție legată de distanță. În școala românească de geometrie se cercetează diferite probleme legate de spațiile cu conexiune afină.

117. Atît Gauss cît și Lobacevski au încercat să stabilească experimental valabilitatea spațiului euclidian, verificînd dacă suma unghiurilor dintr-un triunghi este sau nu egală cu 180°. Gauss a măsurat unghiurile unui triunghi format din vîrfurile a trei munți îndepărtați, dar eroarea de care trebuia să țină seama se încadra în rezultat și nu a putut afirma dacă această sumă este sau nu este egală cu 180°. Problema l-a interesat însă mult ; căci, după cum am arătat, a fost discutată în multe scrisori. Lobacevski a folosit valorile paralaxelor a trei stele, printre care era și Sirius, și a calculat suma unghiurilor unui triunghi ce avea ca vîrfuri Pămîntul, Soarele și Sirius. Măsurătorile de atunci nu puteau corespunde preciziilor necesare, încît, din calculele sale, el a dedus, greșit, că această sumă este mai mică decît 180°. Desigur, acum, după ce a fost formulată teoria relativității generalizată, nu se mai poate afirma că în spațiul cosmic este valabilă geometria euclidiană. Einstein a considerat că spațiului fizic îi corespunde o geometrie riemanniană cu patru dimensiuni (a patra dimensiune fiind timpul). Făcîndu-se observații în timpul unor eclipse de Soare, s-a putut măsura curbura unei raze de lumină care trece prin apropierea Soarelui. Așadar, această rază de lumină, care într-o porțiune mică a spațiului se comportă ca o linie dreaptă, este în realitate o linie curbă, o geodezică.

118. Definind geometria ca studiul proprietăților unui anumit grup de transformări, s-a ajuns la o nouă generalizare a obiectului geometriei, în sensul că drept puncte din spațiu pot fi considerate orice fel de elemente ale unei mulțimi S, de orice natură, cu condiția ca relațiile dintre aceste obiecte să fie de tip spațial.

119. Într-o altă lucrare a sa, *Geometria și problema spațiului* (vol. I—VI), apărută între 1945—1955, F. Gonseth observa : „Cunoașterea spațială se prezintă sub trei aspecte diferite : aspectul intuitiv, aspectul experimental și aspectul deductiv ... Numai prin construirea axiomatică a geometriei, ideea unei geometrii raționale va primi un sens mai precis, un sens mai bine precizat". Iar mai departe adăuga : „Noțiunea de știință abstractă nu se poate forma decît prin axiomatică. Nu numai că axiomatica separă abstractul de experimental, dar numai ea poate stabili defi-

nitia abstractului. Ea o defineşte în mod eficace prin construcţie. Orice altă definiţie, la o analiză mai severă, s-ar arăta superficială şi inoperantă... Axiomatica este metoda prin care poate şi trebuie să se constituie o ştiinţă abstractă".

120. *Definiţiile implicite* apar atunci cînd este imposibil să se definească toţi termenii în mod explicit ; de exemplu, cînd ar trebui să definim cuvîntul A prin termenii cuvîntului B, apoi cuvîntul B prin termenii cuvîntului C şi aşa la nesfîrşit. Acest procedeu este imposibil, fiindcă necesită un număr infinit de cuvinte. În acest caz, se introduc *cuvinte noi*, iar înţelesul lor se deduce din contextul în care apar. O *definiţie explicită* cuprinde termenii noi *exprimaţi cu ajutorul altor termeni cunoscuţi*. Aceşti termeni noi ajută la simplificarea exprimării.

În timp ce Euclid a încercat să definească explicit termenii punct, linie, plan, Pasch a considerat aceşti termeni ca *primitivi*, adică i-a considerat ca *definiţi implicit* prin propoziţiile de bază, pe care le-a privit ca axiome.

121. În 1889, matematicianul italian Giuseppe Peano (1858—1932) a realizat o metodă de axiomatizare a geometriei euclidiene, în lucrarea intitulată *Principiile geometriei expuse logic*. El este primul matematician care a imaginat arta *raţionamentului formal*. Analizînd mecanismul unei demonstraţii, el a ajuns la concluzia că un text matematic, suficient de explicit, ar putea fi exprimat într-un limbaj convenţional care să conţină un număr foarte mic de cuvinte invariabile dispuse după o sintaxă formată dintr-un mic număr de reguli. Un atare text se numeşte *formalizat* ; el se aseamănă cu descrierea unei partide de şah cu ajutorul notaţiilor obişnuite. Un alt matematician italian, Mario Pieri (1860—1904), a publicat în 1899 un studiu asupra geometriei euclidiene cu totul deosebit de cele dinaintea lui. El considera geometria ca o mulţime de elemente nedefinite, numite puncte, şi *noţiunea nedefinită de mişcare*. Primele axiome stabilite astfel arată importanţa pe care o dă el mişcării.

122. Lucrarea lui Hilbert *Bazele geometriei* a apărut, revăzută şi adăugită, în 1903, în a doua ediţie. Ea a fost prezentată Societăţii de fizică a oraşului Kazan, pentru decernarea premiului internaţional Lobacevski. În raportul făcut de H. Poincaré, acesta a scris : „Lucrările lui Hilbert sînt epocale şi el pare a fi pe deplin demn de premiul purtînd numele lui Lobacevski". Această lucrare s-a răspîndit pretutindeni, chiar de la prima ediţie. Ediţia franceză a apărut îndată după cea germană, iar în 1902 *Bazele geometriei* au fost traduse în englezeşte. Ediţia a şaptea şi ultima a acestei cărţi a apărut în 1930.

123. De timpuriu s-a observat că postulatele stabilite de Euclid nu erau suficiente pentru a deduce din ele toate teoremele din *Elemente*. În cartea sa *Despre sferă și cilindru*, Arhimede a fixat cinci postulate dintre care, al cincilea, care poartă numele lui, fusese formulat și de Eudoxos: „Fiind date două segmente neegale, există întotdeauna un anumit multiplu al celui mai mic care este mai mare decît celălalt".

Începînd cu secolul al XVI-lea, matematicienii europeni au început să constate anumite lipsuri în enunțarea postulatelor. De pildă, Gauss a arătat că nu este definită noțiunea „între", care joacă un rol important în toate problemele unde apare poziția unui punct situat *între* alte două etc.

124. În prima ediție a *Bazelor geometriei*, Hilbert nu formulase această axiomă. El a introdus-o abia în ediția a doua, la sugestia lui Poincaré, care a arătat că sistemul lui Hilbert, așa cum fusese plănuit, nu era complet.

125. Analizîndu-se din acest punct de vedere sistemul de axiome, așa cum fusese formulat de Euclid și întregit de Arhimede și Newton, s-a stabilit că prima problemă, a necontradicției, deși nu poate fi dovedită, trebuie considerată ca rezolvată, ținînd seamă că timp de mai bine de 2 000 de ani, nu s-a ivit nici o teoremă care să fie în contradicție cu alta oarecare. La fel și în privința celei de-a doua probleme, a independenței, căci încercările cu privire la independența axiomelor au dus la crearea geometriilor neeuclidiene. Numai în legătură cu cea de-a treia problemă s-au constatat abateri grave, prin existența axiomelor neformulate, dar folosite în cursul demonstrațiilor; de pildă, presupunerea tacită că o figură nu se schimbă prin deplasare, sau axioma stabilită de Pasch care arată că o dreaptă ce intră într-un triunghi, tăind una dintre laturile lui, trebuie să și iasă, tăind încă una dintre laturi.

126. Într-un articol intitulat „Arhitectura matematicii", N. Bourbaki[1] scria: „La începutul secolului s-a renunțat a se vedea în matematici o știință caracterizată printr-un obiect și o metodă unică, exista tendința de a le considera ca pe o serie de discipline bazate pe noțiuni particulare, delimitate cu precizie, legate prin multe căi de comunicație. Azi se pare că evoluția internă a științelor matematice a creat un nucleu central, prin metoda axiomatică ... trăsătura cea mai caracteristică a metodei axiomatice este că realizează o economie de gîndire ... În concepția axiomatică,

[1] Bourbaki, Nicolas, pseudonim colectiv al unui grup de matematicieni francezi.

matematica apare ca un rezervor de forme abstracte ... nu se poate nega că cele mai multe dintre aceste forme au avut la origine un conținut intuitiv bine determinat, dar tocmai golindu-se de acest conținut, ele au devenit susceptibile de a căpăta interpretări noi. Numai cu acest sens al cuvîntului *formă* se poate spune că metoda axiomatică este un formalism; unitatea pe care ea o conferă matematicii nu este armătura logicii formale, unitate de schelet fără viață, ci este seva nutritoare a unui organism în plină dezvoltare, suplu și fecund instrument de cercetare, la care au lucrat conștient toți marii gînditori de matematică de la Gauss încoace, toți acei care, după formula lui Lejeune-Dirichlet au năzuit să înlocuiască calculul prin idei". Trebuie să mai adăugăm că formalismul consideră matematica aidoma unui joc de șah, constînd din semne și reguli de operații.

127. Există două metode deosebite de a stabili adevărurile matematice: *metoda genetică* și *metoda axiomatică*. Aritmetica a fost construită *genetic*, adică s-a pornit de la *noțiunea de unitate*, din ea s-a format noțiunea de *număr întreg* și apoi s-au adăugat, treptat, toate celelalte adevăruri ale aritmeticii care s-au descoperit logic, prin generalizări succesive. Geometria însă nu s-a putut crea în același mod, din cauza structurii continue a figurilor geometrice. Deoarece nu se putea porni de la noțiunea de punct ca să se ajungă la aceea de linie, suprafață și volum, s-a pornit de la definițiile obiectelor geometrice: punct, linie, plan etc., s-au stabilit relații reciproce între acestea prin axiome și apoi s-au dedus logic teoremele.

128. Ideea că matematicile pot fi bazate în întregime pe logică s-a născut în secolul al XIX-lea, cînd s-a putut constata caracterul ei formal. Aceasta este teza *logicismului* și poate fi formulată astfel: Noțiunile matematice pot fi reduse la noțiuni logice independente de intuiție, prin definiții explicite, iar teoremele matematice pot fi deduse din axiomele logicii, prin deducții pur logice. Fundamentarea matematicii prin logică s-a putut realiza după ce George Boole (1815—1864) a pus bazele logicii matematice, adică a unei logici formalizate sau simbolice, prin două lucrări fundamentale: *Analiza matematică a logicii* (1847) și *Legile gîndirii* (1854). Logica matematică se mai numește și *logistică*, nume folosit odinioară de greci ca să denumească tehnica calculului aritmetic. El este acum adoptat pentru a denumi tehnica calculului cu propoziții cu ajutorul unor semne caracteristice: implicația, conjuncția, negația etc., pentru a nota relații logice. Noțiunea unei *logici ca o știință* care să cuprindă principiile și ideile ce se află la baza oricărei științe într-un limbaj formalizat (sau simbolic), a avut-o Leibniz prin 1666. Folosind acest limbaj, scria el, orice

raţionament s-ar transforma într-un calcul, asemănător calculului algebric. El l-a numit „calculus ratiocinator" (calculul raţionamentelor). Încercarea de a aplica metodele logicii în cercetarea fundamentelor aritmeticii a început cu Ch. Peirce (1839—1914), şi R. Dedekind (1831—1916). G. Frege (1846—1925) a făcut trecerea de la metodele logicii la acelea ale logicii simbolice. Mai întîi, în cartea *Bazele aritmeticii*, o cercetare logico-matematică despre noţiunea de număr (1884), el a stabilit noţiunea de număr întreg şi apoi a dedus întreaga aritmetică pe cale logică, pornind de la noţiunea de mulţime şi număr cardinal, definite de G. Cantor (1845—1918). Apoi, în *Legile fundamentale ale aritmeticii* (1893—1903), a reluat aceste cercetări, aplicînd metodele logicii simbolice şi a pus astfel bazele logicismului. El a introdus, alături de *variabile*, şi *operatorii propoziţionali*, numiţi şi *cuantificatori*, adică operatori logici, susceptibili să transforme teoremele în formule exprimate numai prin semne. Dar, din cauză că sistemul de semne pe care l-a folosit era prea complicat, acesta nu a intrat în circulaţie. De popularitate s-a bucurat metoda simbolică imaginată de matematicianul şi logicianul italian G. Peano (1858—1932), expusă în lucrările *Principiile aritmeticii* (1889), *Notaţii de logică matematică* (1894) şi *Formular matematic* (1901). În *Principiile matematicii*, apărută în 1903, Bertrand Russell (1872—1970) a fundamentat întreaga matematică pe baze logice, definind în acest scop noţiunile matematice fundamentale de număr, mărime continuă, funcţie etc., sub formă de anumite constante logice. Apoi, împreună cu A.N. Whitehead (1861—1947), au elaborat un nou tratat asupra ideilor fundamentale ale logicismului, *Principia Mathematica*, în 3 volume, prima ediţie apărînd între 1910—1913, iar ediţia a doua între 1925—1927, lucrare ce se consideră azi clasică.

129. În lucrarea intitulată *Bazele logicii şi ale aritmeticii*, Hilbert schiţează metoda pe care se gîndea să-şi bazeze axiomatizarea aritmeticii, introducînd noţiunea de număr natural în felul următor: „Se numeşte obiect al gîndirii sau, mai pe scurt, *obiect*, un lucru din gîndirea noastră şi se înseamnă printr-un simbol. La baza studiului nostru punem mai întîi un obiect I (unu). Compunerile acestui obiect cu sine însuşi, de cîte două ori, de cîte trei ori sau de mai multe ori, precum II, III, IIII, ... , le numim combinaţii ale obiectului I cu sine însuşi. Aceste combinaţii se numesc, de asemenea, pur şi simplu obiecte şi de aceea obiectul I, de la care s-a pornit se numeşte *obiect simplu*..." Această formulare a fost însă atacată, într-un mod strălucit, de către H. Poincaré, într-un articol intitulat „Noile logici", cuprins în volumul *Ştiinţă şi metodă*, unde găsim: „Precizăm că prin considerarea *obiectului I* nu este implicată noţiunea de număr, căci este de la sine înţeles că I nu-i aici decît un simbol şi nu ne preocupă deloc

să-i cunoaştem semnificaţia. Dar grupele formate cu acest obiect, repetat de două, trei sau mai multe ori ... ah ! de data aceasta nu mai este acelaşi lucru, căci dacă introducem cuvintele *două*, *trei*, şi mai ales, *de mai multe ori*, înseamnă că introducem noţiunea de număr, iar atunci definiţia numărului întreg finit, pe care vom afla-o îndată, va veni prea tîrziu ! Autorul este un prea bun cunoscător al problemei ca să nu fi observat el însuşi această greşeală logică ..."

130. Metamatematica, după concepţia lui Hilbert, înseamnă *comentarea* prin cuvinte obişnuite, adică o analiză riguroasă a configuraţiilor de semne prin care erau exprimate teoremele. Un asemenea comentariu *nu mai este matematică*, chiar dacă cuprinde expresii matematice, fiindcă în el *se vorbeşte despre matematică*. De exemplu, formula $3 + 4 = 7$ aparţine matematicii, fiind construită numai din semne aritmetice lipsite de orice semnificaţie. Despre această expresie matematică se pot spune următoarele lucruri: „Avem de-a face cu o formulă aritmetică şi această formulă este corectă, fiindcă a fost respectată regula corespunzătoare expresiilor numerice de a pune de o parte şi de alta a semnului egal expresii echivalente". Aceste observaţii însă nu exprimă *un fapt matematic*, ci o *comentare* a lui, de aceea ele aparţin *metamatematicii*. În metamatematică, Hilbert a folosit metoda de raţionament legată de problemele *concrete* şi *finite*, singura care se putea baza pe intuiţia asupra numerelor întregi.

131. Criza provocată la începutul secolului al XIX-lea, pe de o parte, de apariţia *Geometriilor neeuclidiene* şi, pe de alta, de crearea *Teoriei mulţimilor*, a pus problema cercetării principiilor şi ale noţiunilor fundamentale pe care se sprijină atît geometria, cît şi aritmetica, respectiv analiza matematică, ca să li se dea o bază logică riguroasă. Primele lucrări au fost făcute de Bernard Bolzano (1781—1848). În articolul „Contribuţii la o reprezentare bine întemeiată a matematicilor", publicat în 1810, el a încercat să izoleze noţiunile simple, ireductibile şi principiile care definesc relaţiile dintre ele, astfel ca să poată descrie modul lor de înlănţuire logică, fără a mai recurge la intuiţia geometrică, învinuită de a fi cauza care a provocat tulburările şi contrazicerile din matematici. Alte lucrări se datoresc lui A.L. Cauchy, K. Weierstrass, R. Dedekind, G. Cantor, G. Peano etc. Dar aceste cercetări nu au pornit toate de la acelaşi punct de vedere; astfel s-au conturat trei şcoli considerate principale: *logicismul*, reprezentat de A.N. Whitehead şi B. Russell, susţinînd teza: „toate noţiunile matematice se pot defini în raport cu acelea ale logicii şi toate teoremele matematice urmează din aceste definiţii pe baza principiilor logice", *formalismul*, reprezentat de D. Hilbert, pentru care matematica

se aseamănă unui joc combinatoric cu simboluri constînd din semne şi reguli prezentate arbitrar, care trebuie dovedit că este compatibil, şi *intuiţionismul*, iniţiat de L. Kronecker (1823—1891) prin opoziţia lui faţă de fundamentarea analizei pe definiţia numerelor iraţionale şi teoria mulţimilor. Ideile sale au fost dezvoltate de matematicianul olandez L.E.J. Brouwer, care a ajuns la concluzia că gîndirea matematică se manifestă ca un proces de construcţii, stabilindu-şi propriul său domeniu bazat pe intuiţia matematică ; de aceea, fundamentele matematicii trebuie să deosebească tezele intuitiv acceptabile de acelea ce nu sînt determinate de intuiţie.

132. Intuiţia este cunoaşterea *nemijlocită* şi ea se opune cunoaşterii logice, *mijlocite*. De aceea, intuiţionismul afirmă imposibilitatea de a reduce matematica la logică sau la formalism, considerînd că aceste două curente folosesc mijloace artificiale pentru a stabili adevărurile matematice. De pildă, dacă se aplică principiile logicii la mulţimile infinite, intuiţioniştii afirmă că trebuie să se ajungă la contradicţii. Aceasta fiindcă în aceste mulţimi nu se pot stabili precis cum se formează elementele lor, dat fiind că ele nu pot fi construite printr-un număr finit de operaţii. De aceea, nici nu se poate dovedi existenţa mulţimilor infinite. Semnificaţia intuiţiei este „perceperea unui obiect prin ochi" şi la baza matematicii se află intuiţia primitivă legată de simţul nostru temporar de *dinainte* şi de *după*. Datorită lui a fost posibil să concepem întîi un obiect, apoi încă unul, şi încă unul, care ne-a dus astfel la noţiunea intuitivă de şir al numerelor naturale. De la această bază intuitivă a şirului numerelor naturale, orice obiect matematic apare *în mod constructiv*, folosindu-se un număr finit de operaţii.

BIBLIOGRAFIE

Becker, O., *Fundamentele matematicii*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1968.

Bell, E.T., *Les grands mathématiciens*, Payot, Paris, 1961.

Bonola, R. şi Liebmann, H., *Die Nichteuklidische Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1908.

Brunschvicg, L., *Les étapes de la Philosophie mathématique*, Paris, F. Alcan, 1922.

Câmpan, Fl., *Bolyai*, Editura Albatros, Bucureşti, 1971.

Courant, R., Robbins, H., *Ce este matematica?* Edit. ştiinţifică, Bucureşti, 1969.

Cutuzov, B.V., *Geometria lui Lobacevski*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1952.

Eves, H. şi Newsom, C., *An introduction to the foundations*, Rinehart, New York, 1958.

Gonseth, F., *La géométrie et le problème de l'espace*, Tome I—VI, Griffon, Neuchâtel, 1945—1955.

Kagan, V., *Lobacevski*, Mir, Moscova, 1974.

Klein, F., *Le programme d'Erlangen*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

Kropp, G., *Geschichte der Mathematik*, Quelle, Heidelberg, 1969.

* * * *Matematica, conţinutul, metodele şi importanţa ei*, Editura ştiinţifică, vol. I—III, Bucureşti, 1960—1961.

Mayer, O. *Geometrie proiectivă*, Edit. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1970.

Newman, J.R., *The world of mathematics*, I, Simon, New York, 1956.

Poincaré, H., *La valeur de la science*, Flammarion, Paris, 1925.

Smilga, V., *În goană după frumos*, Editura tineretului, Bucureşti, 1968.

Stäckel, P., Engels, F., *Die Theorie der Parallellinien*, Leipzig, 1895.

Stoilov, S., *Matematică şi viaţă*, Edit. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1972.

Taton, R., *Istoria generală a ştiinţei*, vol. I—IV, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1970—1976.

Vrănceanu, Gh., *Geometrie analitică şi proiectivă*, Editura tehnică, Bucureşti, 1954.

Vrănceanu Gh., Teleman, C., *Geometrie euclidiană, Geometrie neeuclidiană*, Editura tehnică, Bucureşti, 1967.

CUPRINS

INTRODUCERE 7

UN DAR MAGNIFIC 11

DE-A ASCUNSELEA 21

ÎNDOIALA 32

„DIN NEANT UN UNIVERS ÎNTREG" 45

O ATITUDINE BIZARĂ 65

UN TRĂSNET DIN SENIN 75

UN MATEMATICIAN INGENIOS 91

ULTIMA INTERVENȚIE 102

AGITAȚIE ÎN MASĂ 117

O TENTATIVĂ ÎNDRĂZNEAȚĂ 131

FAȚĂ-N FAȚĂ CU REALITATEA 148

FAȚĂ-N FAȚĂ CU ADEVĂRUL 160

NOTE 168

BIBLIOGRAFIE 222

Lector : GHEORGHE FOLESCU
Tehnoredactor : CORNEL CRISTESCU

Bun de tipar : 24.VII.1978. Apărut 1978.
Comanda nr. 1203
Tiraj ; 25.000 ex. broşate.
Coli de tipar : 14.

Tiparul executat sub comanda nr. 95
la Intreprinderea poligrafică IAŞI
Str. Vasile Alecsandri nr. 6 Iaşi
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

„Geometria euclidiană, edificiul superb al civilizației elene, rămîne în picioare, desigur, în perfecțiunea ei logică. Dar alături de ea și egal îndreptățite din toate punctele de vedere pentru cunoașterea tot mai adîncă și mai cuprinzătoare a naturii, stau azi diversele geometrii neeuclidiene".

SIMION STOILOV

Lei 5